ALGEBRĂ LINIARĂ, GEOMETRIE ANALITICĂ ŞI DIFERENŢIALĂ
Note de curs

GRAŢIELA CICORTAŞ

Capitolul 1

Spaţii vectoriale finit dimensionale

1.1 Definiţia spaţiului vectorial. Exemple

Fie $\mathbb{K}$ un corp comutativ (în general $\mathbb{K}$ va fi $\mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$).

Definiţia 1.1.1 Se numeşte *spaţiu vectorial* peste corpul $\mathbb{K}$ o mulţime $V \neq \emptyset$ dotată cu două operaţii:
$+ : V \times V \to V, (x, y) \mapsto x + y$
$\cdot : \mathbb{K} \times V \to V, (\alpha, x) \mapsto \alpha \cdot x$
astfel încât sunt verificate următoarele axiome:
I. $(V, +)$ este grup comutativ
II.1. $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$
II.2. $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$
II.3. $\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha \cdot \beta) \cdot x$
II.4. $1 \cdot x = x$,
$\forall\ x, y \in V,\ \forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{K},\ 1 \in \mathbb{K}$ fiind elementul unitate.

Vom nota acest spaţiu vectorial prin $(V, +, \cdot, \mathbb{K})$.

Elementele spaţiului vectorial V se numesc *vectori*, iar elementele corpului $\mathbb{K}$ se numesc *scalari*. Operaţia "+" se numeşte *adunarea vectorilor*, iar "$\cdot$" se numeşte *înmulţirea vectorilor cu scalari*. Elementul neutru al grupului $(V, +)$ se notează 0_V şi se numeşte *vector nul*.

Exemple: 1. $(\mathbb{R}, +, \cdot, \mathbb{R})$ este spaţiu vectorial.

2. $(\mathbb{K}, +, \cdot, \mathbb{K})$ este spaţiu vectorial, $\mathbb{K}$ fiind corp comutativ.

3. $(\mathbb{R}^n, +, \cdot, \mathbb{R})$ este spaţiu vectorial.

Fie $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\cdots\times\mathbb{R}}_{de\ n\ ori}$ (n - număr natural fixat). Dacă $x\in\mathbb{R}^n$, atunci x este de forma $x=(x_1,\ldots,x_n), x_1,\ldots,x_n\in\mathbb{R}$. Operaţiile "+" şi "·" se definesc astfel:

$+:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n, (x,y)\mapsto x+y$

$x=(x_1,\ldots,x_n), y=(y_1,\ldots,y_n), x+y\overset{def}{=}(x_1+y_1,\ldots,x_n+y_n)$

$\cdot:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n, (\alpha,x)\mapsto\alpha\cdot x$

$\alpha\cdot x\overset{def}{=}(\alpha\cdot x_1,\ldots,\alpha\cdot x_n)$

Să verificăm că $(\mathbb{R}^n,+,\cdot,\mathbb{R})$ este spaţiu vectorial:

- operaţiile sunt corect definite, adică $x+y, \alpha\cdot x\in\mathbb{R}^n$;

I. $(\mathbb{R}^n,+)$ este grup comutativ;

1. "+" este asociativă: $\forall\ x,y,z\in\mathbb{R}^n$, $(x+y)+z=x+(y+z)$

$x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$; $y=(y_1,y_2,\ldots,y_n)$; $z=(z_1,z_2,\ldots,z_n)$

$(x+y)+z=(x_1+y_1,x_2+y_2,\ldots,x_n+y_n)+(z_1,z_2,\ldots,z_n)=((x_1+y_1)+z_1,(x_2+y_2)+z_2,\ldots,(x_n+y_n)+z_n)=(x_1+(y_1+z_1),x_2+(y_2+z_2),\ldots,x_n+(y_n+z_n))=(x_1,x_2,\ldots,x_n)+(y_1+z_1,y_2+z_2,\ldots,y_n+z_n)=x+(y+z)$

2. "+" admite element neutru:

$\exists\ e\in\mathbb{R}^n$ astfel încât $\forall\ x\in\mathbb{R}^n$, avem $e+x=x+e=x$.

Fie $e=(e_1,e_2,\ldots,e_n)$ şi $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$. Egalităţile $(e_1+x_1,e_2+x_2,\ldots,e_n+x_n)=(x_1+e_1,x_2+e_2,\ldots,x_n+e_n)=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ implică

$e_1+x_1=x_1+e_1=x_1, \forall x_1\in\mathbb{R},$ deci $e_1=0$

$\vdots$

$e_n+x_n=x_n+e_n=x_n,\ \forall\ x_n\in\mathbb{R},$ deci $e_n=0$.

Obţinem $e=\underbrace{(0,0,\ldots,0)}_{de\ n\ ori}\overset{not}{=}0_{\mathbb{R}^n}$.

3. Orice element din $\mathbb{R}^n$ este simetrizabil:

$\forall x\in\mathbb{R}^n,\exists x'\in\mathbb{R}^n$ astfel încât $x+x'=x'+x=0_{\mathbb{R}^n}$.

Fie $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ şi $x'=(x'_1,x'_2,\ldots,x'_n)$. Egalităţile $(x_1+x'_1,x_2+x'_2,\ldots,x_n+x'_n)=(x'_1+x_1,x'_2+x_2,\ldots,x'_n+x_n)=\underbrace{(0,0,\ldots,0)}_{de\ n\ ori}$ implică

$x_1+x'_1=x'_1+x_1=0,$ deci $x'_1=-x_1$

$\vdots$

$x_n+x'_n=x'_n+x_n=0,$ deci $x'_n=-x_n$.

Obţinem $x'=(-x_1,-x_2,\ldots,-x_n)\overset{not}{=}-x=(-1)\cdot x$.

4. "+" este comutativă: $\forall\ x,y\in\mathbb{R}^n,\ x+y=y+x$

Fie $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ şi $y=(y_1,y_2,\ldots,y_n)$. Atunci avem:

$x+y=(x_1+y_1,x_2+y_2,\ldots,x_n+y_n)=(y_1+x_1,y_2+x_2,\ldots,y_n+x_n)=y+x$

II. 1. $\alpha\cdot(x+y)=\alpha\cdot x+\alpha\cdot y,\ \forall\ x,y\in\mathbb{R}^n,\ \alpha\in\mathbb{R}$

$\alpha \cdot (x+y) = \alpha \cdot (x_1+y_1, x_2+y_2, \ldots, x_n+y_n) = (\alpha \cdot (x_1+y_1), \alpha \cdot (x_2+y_2), \ldots, \alpha \cdot (x_n+y_n)) = (\alpha x_1 + \alpha y_1, \alpha x_2 + \alpha y_2, \ldots, \alpha x_n + \alpha y_n) = (\alpha x_1 + \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n) + (\alpha y_1, \alpha y_2, \ldots, \alpha y_n) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$

Analog se verifică axiomele II.2, II.3 şi II.4.

4. $(\mathbb{K}^n, +, \cdot, \mathbb{K})$ este spaţiu vectorial, $\mathbb{K}$ fiind corp comutativ. Prin definiţie, $\mathbb{K}^n = \underbrace{\mathbb{K} \times \mathbb{K} \times \cdots \times \mathbb{K}}_{de\ n\ ori}$; operaţiile "+" şi "·" se definesc analog Exemplului 3.

5. $(\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}), +, \cdot, \mathbb{R})$ este spaţiu vectorial în raport cu operaţiile uzuale de adunare a matricelor şi înmulţire a matricelor cu scalari.

Consecinţe ale definiţiei spaţiului vectorial

1) $0 \cdot x = 0_V, \ \forall\, x \in V$

2) $\alpha \cdot 0_V = 0_V, \ \forall\, \alpha \in \mathbb{K}$

3) Dacă $\alpha \cdot x = 0_V$, atunci $\alpha = 0$ sau $x = 0_V$

4) $(-1) \cdot x = -x, \ \forall\, x \in V$

Demonstraţie:

1) Utilizăm axioma II.2 cu $\alpha = 1$ şi $\beta = 0$.

2) Utilizăm axioma II.1 cu $x = y = 0_V$ sau II.3 cu $\beta = 0$.

3) Dacă $\alpha = 0$, afirmaţia este adevărată. Dacă $\alpha \neq 0$, arătăm că $x = 0_V$:
$x = 1 \cdot x = \left(\frac{1}{\alpha} \cdot \alpha\right) \cdot x = \frac{1}{\alpha} \cdot (\alpha \cdot x) = \frac{1}{\alpha} \cdot 0_V = 0_V$

4) Utilizăm axioma II.2 cu $\alpha = 1$ şi $\beta = -1$.

1.2 Combinaţie liniară. Liniar dependenţă şi liniar independenţă. Sistem de generatori

Fie $(V, +, \cdot, \mathbb{K})$ un spaţiu vectorial.

Definiţia 1.2.1 Fie $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset V$ un sistem de vectori. Se numeşte *combinaţie liniară* a vectorilor $v_1, v_2, \ldots, v_n$ orice vector de forma

$$\alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \cdots + \alpha_n \cdot v_n,$$

unde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$. Dacă $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$, combinaţia se numeşte trivială. Altfel, combinaţia se numeşte netrivială.

Definiţia 1.2.2 Vectorii $v_1, v_2, \ldots, v_n$ se numesc *liniar dependenţi* dacă vectorul nul 0_V este o combinaţie liniară netrivială a lor:

$$\exists\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}, \text{ nu toţi nuli, astfel încât}$$

$$\alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \cdots + \alpha_n \cdot v_n = 0_V.$$

În caz contrar, vectorii $v_1, v_2, \dots, v_n$ se numesc *liniar independenţi*. Altfel spus, $v_1, v_2, \dots, v_n$ sunt liniar independenţi dacă:

$$\forall \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}, \alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \cdots + \alpha_n \cdot v_n = 0_V \text{ avem}$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0.$$

Definiţia 1.2.3 Un sistem infinit de vectori S din V se numeşte liniar independent dacă orice subsistem finit al său este liniar independent. În caz contrar sistemul se numeşte liniar dependent.

Un sistem oarecare de vectori, finit sau infinit, se va nota prin $S = \{v_\alpha\}_{\alpha \in I}$, unde I este o familie de indici.

Vom spune că un vector $v \in V$ este o combinaţie liniară a lui S dacă este combinaţie liniară a unui subsistem finit al lui S.

Observaţia 1.2.1 (i) Dacă $0_V \in \{v_1, \dots, v_n\}$, atunci $\{v_1, \dots, v_n\}$ este un sistem liniar dependent. Afirmaţia se justifică astfel:

$$1 \cdot 0_V + 0 \cdot v_2 + \cdots + 0 \cdot v_n = 0_V$$

(ii) O submulţime a unui spaţiu vectorial V formată dintr-un singur vector v este liniar independentă dacă şi numai dacă $v \neq 0_V$.

Propoziţia 1.2.1 *(i) $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset V$ este un sistem liniar dependent dacă şi numai dacă există cel puţin un vector din S care se poate exprima ca o combinaţie liniară de ceilalţi vectori ai sistemului S.*

(ii) Orice subsistem al unui sistem liniar independent este liniar independent.

Demonstraţie: (i) "$\Rightarrow$" Fie $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset V$ un sistem liniar dependent. Atunci $\exists\ \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$, nu toţi nuli, astfel încât

$$\alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \cdots + \alpha_n \cdot v_n = 0_V$$

Fie, de exemplu, $\alpha_i \neq 0$; putem scrie

$$v_i = -\frac{\alpha_1}{\alpha_i} v_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_i} v_2 - \cdots - \frac{\alpha_{i-1}}{\alpha_i} v_{i-1} - \frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i} v_{i+1} - \cdots - \frac{\alpha_n}{\alpha_i} v_n,$$

adică $v_i \in S$ se poate scrie ca o combinaţie liniară a vectorilor din $S \setminus \{v_i\}$.

"$\Leftarrow$" Presupunem că există $v_i \in S$ astfel încât

$$v_i = \alpha_1 \cdot v_1 + \cdots + \alpha_{i-1} \cdot v_{i-1} + \alpha_{i+1} \cdot v_{i+1} + \cdots + \alpha_n \cdot v_n$$

sau, echivalent,

$$\alpha_1 \cdot v_1 + \cdots + \alpha_{i-1} \cdot v_{i-1} + (-1) \cdot v_i + \alpha_{i+1} \cdot v_{i+1} + \cdots + \alpha_n \cdot v_n = 0_V$$

Deoarece $\alpha_i = -1 \neq 0$, combinaţia este netrivială, deci S este sistem liniar dependent.

(ii) Prin reducere la absurd, presupunem că $\{v_1, \ldots, v_n\}$ este sistem liniar independent şi $\{v_1, \ldots, v_i\}$, $i < n$, este sistem liniar dependent (eventual renumerotăm vectorii). Rezultă că $\exists \alpha_1, \ldots, \alpha_i \in \mathbb{K}$, nu toţi nuli, astfel încât

$$\alpha_1 \cdot v_1 + \cdots + \alpha_i \cdot v_i = 0_V$$

Atunci putem scrie

$$\alpha_1 \cdot v_1 + \cdots + \alpha_i \cdot v_i + 0 \cdot v_{i+1} + \cdots + 0 \cdot v_n = 0_V,$$

deci $\{v_1, \ldots, v_n\}$ este sistem liniar dependent; contradicţie.$\diamondsuit$

Definiţia 1.2.4 Fie $S = \{v_\alpha\}_{\alpha \in I}$ un sistem oarecare de vectori din V. Sistemul S se numeşte *sistem de generatori* pentru spaţiul vectorial V dacă orice vector din V este o combinaţie liniară a lui S.

1.3 Bază. Dimensiune

Definiţia 1.3.1 Fie $(V, +, \cdot, \mathbb{K})$ spaţiu vectorial. O mulţime $B \subset V$ se numeşte *bază* a spaţiului vectorial V dacă B este un sistem de generatori pentru V şi B este sistem liniar independent.

Dacă o bază B are un număr finit de vectori, V se numeşte *spaţiu vectorial finit generat*. Altfel, V se numeşte *spaţiu vectorial infinit generat*.

Deşi sistemul de generatori a fost definit ca mulţime de vectori, pentru o bază ordinea este importantă. *Baza este un sistem ordonat de vectori.* Două baze alcătuite din aceiaşi vectori aşezaţi în ordini diferite vor fi considerate baze diferite.

Teorema 1.3.1 (Teorema de existenţă a bazei) *Fie $(V, +, \cdot, \mathbb{K})$ spaţiu vectorial, $V \neq \{0_V\}$. Din orice sistem de generatori finit al lui V se poate extrage o bază finită.*

Demonstraţie: V fiind un spaţiu vectorial finit generat, $\exists\ S = \{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$ un sistem de generatori al lui V.

Cazul I: S - sistem liniar independent; atunci este bază

Cazul II: S - sistem liniar dependent

Conform Propoziţiei 1.2.1 (i), $\exists\ v_i = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_{i-1}v_{i-1} + \alpha_{i+1}v_{i+1} + \cdots + \alpha_n v_n$.

Fie $S' = S \setminus \{v_i\}$. Dacă S' este liniar independent, atunci S' este bază; altfel, repetăm procedeul de mai sus.$\diamondsuit$

Teorema 1.3.2 (Teorema de completare a bazei) *Fie* $(V, +, \cdot, \mathbb{K})$ *un spaţiu vectorial finit generat. Orice sistem liniar independent din* V *se poate completa la o bază a lui* V.

Fără demonstraţie.

Teorema 1.3.3 (Lema substituţiei) *Dacă* $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ *este un sistem de generatori al lui* V *şi* $\{y_1, y_2, \ldots, y_r\} \subset V$ *este un sistem liniar independent, atunci au loc următoarele afirmaţii:*

(i) $r \leq m$;

(ii) r *dintre vectorii sistemului* $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ *pot fi înlocuiţi cu vectorii sistemului* $\{y_1, y_2, \ldots, y_r\}$ *astfel încât sistemul obţinut să fie de asemenea sistem de generatori al lui* V.

Demonstraţie: Demonstrăm prin inducţie relativ la r.

Dacă $r = 1$, evident $r \leq m$.

Fie $y_1 \in V$, $\{y_1\}$ fiind un sistem liniar independent, adică $y_1 \neq 0_V$.

S este un sistem de generatori al lui V, deci $\exists \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{K}$, nu toţi nuli (altfel $y_1 = 0_V$), astfel încât

$$y_1 = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_m x_m$$

Presupunem $\alpha_1 \neq 0$ şi obţinem $x_1 = \frac{1}{\alpha_1} y_1 + \left(-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) x_2 + \cdots + \left(-\frac{\alpha_m}{\alpha_1}\right) x_m$. S fiind un sistem de generatori al lui V, $\forall\ v \in V$, $\exists\ \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m \in \mathbb{K}$ astfel încât

$$v = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_m x_m$$

Înlocuind x_1 din relaţia de mai sus obţinem

$$v = \frac{\beta_1}{\alpha_1} y_1 + \left(\beta_2 - \frac{\beta_1 \alpha_2}{\alpha_1}\right) x_2 + \cdots + \left(\beta_m - \frac{\beta_1 \alpha_m}{\alpha_1}\right) x_m$$

Am arătat că $\{y_1, x_2, \ldots, x_m\}$ este un sistem de generatori al lui V.

Presupunem afirmaţia adevărată pentru $r - 1$:

$r - 1 \leq m$

$\{y_1, y_1, \ldots, y_{r-1}, x_r, \ldots, x_m\}$ este un sistem de generatori al lui V.

Dacă $r-1=m$, atunci $\{y_1, y_2, \ldots, y_{r-1}=y_m\}$ este un sistem de generatori al lui V, deci $\exists \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{r-1} \in \mathbb{K}$ astfel încât

$$y_r = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \cdots + \alpha_{r-1} y_{r-1}$$

sau, echivalent,

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \cdots + \alpha_{r-1} y_{r-1} + (-1) y_r = 0_V$$

0_V este o combinaţie netrivială a vectorilor sistemului $\{y_1, y_2, \ldots, y_r\}$, deci acesta este un sistem liniar dependent; contradicţie.

Atunci $r-1 < m$ sau $r \leq m$ şi afirmaţia (i) este demonstrată.

$\{y_1, y_2, \ldots, y_{r-1}, x_r, \ldots, x_m\}$ este un sistem de generatori al lui V, deci

$$y_r = \alpha_1 y_1 + \cdots + \alpha_{r-1} y_{r-1} + \alpha_r x_r + \cdots + \alpha_m x_m$$

Putem presupune $\alpha_r \neq 0$; atunci avem

$$x_r = -\frac{\alpha_1}{\alpha_r} y_1 - \cdots - \frac{\alpha_{r-1}}{\alpha_r} y_{r-1} + \frac{1}{\alpha_r} y_r - \frac{\alpha_{r+1}}{\alpha_r} x_{r+1} - \cdots - \frac{\alpha_m}{\alpha_r} x_m$$

şi $\{y_1, \ldots, y_r, x_{r+1}, \ldots, x_m\}$ este un sistem de generatori.$\diamondsuit$

Teorema 1.3.4 (Teorema privind cardinalul bazei) *Fie $(V, +, \cdot, \mathbb{K})$ un spaţiu vectorial finit generat, $V \neq \{0_V\}$. Toate bazele spaţiului vectorial V sunt finite şi au acelaşi număr de elemente.*

Demonstraţie: Din faptul că V este spaţiu vectorial finit generat şi din Teorema 1.3.1 deducem că există $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ o bază finită a spaţiului vectorial V.

Presupunem că există o bază B' infinită; atunci B' este sistem liniar independent şi din Propoziţia 1.2.1 (ii) rezultă că orice submulţime a lui B' este liniar independentă.

Fie $S \subset B'$, cu $n+1$ elemente; din Teorema 1.3.3 (i) avem $n+1 \leq n$; contradicţie. Deci orice bază este finită.

Fie $B_1 = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ o altă bază a lui V. Aplicăm de două ori Teorema 1.3.3 (i) pentru B şi B_1 şi găsim $n \leq m,\ m \leq n$, adică $m = n$. $\diamondsuit$

Definiţia 1.3.2 Fie $(V, +, \cdot, \mathbb{K})$ un spaţiu vectorial finit generat. Se numeşte *dimensiune* a spaţiului vectorial V numărul de vectori dintr-o bază (număr comun tuturor bazelor). Se notează cu $\dim_{\mathbb{K}} V$.

Faptul că V este finit generat (finit dimensional) se precizează astfel: $\dim_{\mathbb{K}} V < +\infty$. Evident $\dim_{\mathbb{K}}\{0_V\} = 0$.

Exemple: 1. $B_c = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ este o bază a spaţiului vectorial $\mathbb{R}^n$, numită *baza canonică*. Aici am notat

$$e_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0),\ e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, 0, \ldots, 0, 1)$$

B_c este un sistem liniar independent:

$$\forall\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R} \text{ astfel încât } \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n = 0_n,$$

avem $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = (0, 0, \ldots, 0)$, deci $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$.

B_c este un sistem de generatori, adică $\forall\ x \in \mathbb{R}^n$, $\exists\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ astfel încât $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n$.
$x \in \mathbb{R}^n$, deci x este de forma $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x_k \in \mathbb{R}$, $k = \overline{1, n}$.

Putem scrie

$$x = (x_1, 0, 0, \ldots, 0) + (0, x_2, 0, \ldots, 0) + (0, 0, \ldots, 0, x_n) = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n$$

Definim $\alpha_k = x_k$, $k = \overline{1, n}$. Găsim $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^n = n$.

2. $dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})) = mn$

O bază a acestui spaţiu vectorial este $B = \{E_{ij} | 1 \le i \le m, 1 \le j \le n\}$ unde $E_{ij} = (\delta_{ir} \cdot \delta_{js})_{\substack{1 \le r \le m \\ 1 \le s \le n}}$, iar $\delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1, & \alpha = \beta \\ 0, & \alpha \ne \beta \end{cases}$ este simbolul lui Kronecker.

Teorema 1.3.5 (Teorema de caracterizare a bazei) *Fie* $(V, +, \cdot, \mathbb{K})$ *un spaţiu vectorial astfel încât* $\dim_{\mathbb{K}} V = n$.

Sistemul de vectori $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ *este o bază a lui* V *dacă şi numai dacă* $\forall\ x \in V$, $x = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_n v_n$, $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$ *fiind unici cu această proprietate.*

Demonstraţie: "$\Rightarrow$" $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ este bază, deci B este un sistem de generatori pentru V. Atunci $\forall\ x \in V$, $\exists\ x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$ astfel încât $x = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n$.

Presupunem că $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$ de mai sus nu sunt unici; există $x'_1, \ldots, x'_n \in \mathbb{K}$ astfel încât $x = x'_1 v_1 + \cdots + x'_n v_n$.

Deducem

$$x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n = x'_1 v_1 + \cdots + x'_n v_n$$

$$(x_1 - x'_1) v_1 + \cdots + (x_n - x'_n) v_n = 0_V$$

B fiind bază, este un sistem liniar independent. Atunci combinaţia de mai sus este trivială, adică $x_1 - x'_1 = \cdots = x'_n - x'_n = 0$ sau $x_1 = x'_1, \ldots, x_n = x'_n$.

"$\Leftarrow$" Presupunem că $\forall\ x \in V$, $\exists\ x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ unici astfel încât $x = x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_nv_n$. Atunci B este un sistem de generatori pentru V.

Arătăm că B este sistem liniar independent.

$\forall\ \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ astfel încât $\alpha_1v_1 + \alpha_2v_2 + \cdots + \alpha_nv_n = 0_V$, putem scrie $\alpha_1v_1 + \alpha_2v_2 + \cdots + \alpha_nv_n = 0_V = 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \cdots + 0 \cdot v_n$

Scrierea lui 0_V este unică (conform ipotezei), deci $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$. Atunci B este bază.$\diamondsuit$

Observaţia 1.3.1 Într-un spaţiu vectorial n-dimensional, un sistem format din n vectori liniar independenţi formează o bază.

Observaţia 1.3.2 În spaţiul vectorial $\mathbb{R}^n$ vectorii $x^k = (x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k)$, $k = \overline{1,n}$, sunt liniar independenţi dacă şi numai dacă

$$\begin{vmatrix} x_1^1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ x_2^1 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n^1 & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{vmatrix} \neq 0$$

Să justificăm această afirmaţie. Fie $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ astfel încât $\alpha_1x^1 + \alpha_2x^2 + \cdots + \alpha_nx^n = 0$, sau, echivalent,

$$\alpha_1(x_1^2 + x_2^1, \dots, x_n^1) + \alpha_2(x_1^2, x_2^2, \dots, x_n^2) + \cdots + \alpha_n(x_1^n, x_2^n, \dots, x_n^n) = (0, 0, \dots, 0)$$

Atunci avem:

$$\begin{cases} \alpha_1x_1^1 + \alpha_2x_1^2 + \cdots + \alpha_nx_1^n = 0 \\ \alpha_1x_2^1 + \alpha_2x_2^2 + \cdots + \alpha_nx_2^n = 0 \\ \dots \\ \alpha_1x_n^1 + \alpha_2x_n^2 + \cdots + \alpha_nx_n^n = 0 \end{cases}$$

$\{x^k\}$, $k = \overline{1,n}$ este sistem liniar independent dacă şi numai dacă $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$ este soluţie unică a sistemului de mai sus $\Leftrightarrow \det A \neq 0$.

Exemplu: $\{(1,2,1), (2,1,3), (-1,0,2)\}$ formează o bază a spaţiului vectorial $\mathbb{R}^3$, deoarece

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -11 \neq 0$$

1.4 Schimbări de baze într-un spaţiu vectorial

Definiţia 1.4.1 Scalarii (unici) $x_1, x_2, \dots, x_n$ din combinaţia liniară

$$x = x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_nv_n$$

din Teorema 1.3.5 se numesc *coordonatele vectorului* x *în baza* $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Relaţia de mai sus se numeşte *reprezentarea vectorului* x în baza B.

Vom nota $x_B = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Observaţia 1.4.1 Coordonatele unui vector depind de bază.

Se pune problema următoare: cum se modifică aceste coordonate dacă schimbăm baza?

Fie $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ şi $B' = \{v'_1, v'_2, \dots, v'_n\}$ două baze în spaţiul vectorial n-dimensional V.

Putem exprima vectorii $v'_1, v'_2, \dots, v'_n$ în baza B:

$$v'_i = \sum_{k=1}^{n} c^i_k v_k, i = \overline{1,n},\ \ c^i_k \in \mathbb{K} \text{ unici}$$

$$v'_i = c^i_1 v_1 + c^i_2 v_2 + \dots + c^i_n v_n, i = \overline{1,n} \qquad (*)$$

Definiţia 1.4.2 Matricea $C = (c^i_k)_{1 \leq k,i \leq n}$, $c^i_k \in \mathbb{K}$, unic determinată, ce are ca elemente coeficienţii c^i_k din relaţia $(*)$ aşezaţi pe coloane, se numeşte *matricea de trecere de la baza B la baza B'*, iar formulele notate cu $(*)$ se numesc *formule de trecere de la baza B la baza B'*.

Vom nota $B \overset{C}{\vdash} B'$.

Observaţia 1.4.2 Matricea C este nesingulară (altfel B' este un sistem liniar dependent).

Propoziţia 1.4.1 *Fie V un spaţiu vectorial n-dimensional şi schimbarea de baze $B \overset{C}{\vdash} B'$. Fie $x_B = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ şi $x'_B = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$. Atunci avem:*

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = C^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

(formulele de schimbare a coordonatelor).

Demonstraţie: Din formulele de schimbare a bazelor $(*)$ deducem $x = x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_nv_n = x'_1v'_1 + x'_2v'_2 + \cdots + x'_nv'_n = x'_1(c_1^1v_1 + c_2^1v_2 + \cdots + c_n^1v_n) + x'_2(c_1^2v_1 + c_2^2v_2 + \cdots + c_n^2v_n) + \cdots + x'_n(c_1^nv_1 + c_2^nv_2 + \cdots + c_n^nv_n) = (x'_1c_1^1 + x'_2c_1^2 + \cdots + x'_nc_1^n)v_1 + (x'_1c_2^1 + x'_2c_2^2 + \cdots + x'_nc_2^n)v_2 + \cdots + (x'_1c_n^1 + x'_2c_n^2 + \cdots + x'_nc_n^n)v_n$

Din Teorema 1.3.5 avem:

$$\begin{cases} x_1 = x'_1c_1^1 + x'_2c_1^2 + \cdots + x'_nc_1^n \\ x_2 = x'_1c_2^1 + x'_2c_2^2 + \cdots + x'_nc_2^n \\ \dots \\ x_n = x'_1c_n^1 + x'_2c_n^2 + \cdots + x'_nc_n^n \end{cases}$$

relaţii ce se pot scrie sub forma

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = C \cdot \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \dots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

Notăm

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \dots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

şi avem $X = C \cdot X'$, de unde rezultă $X' = C^{-1} \cdot X$. $\diamondsuit$

Observaţia 1.4.3 (i) Dacă $B \overset{C}{\vdash} B'$, atunci $B' \overset{C^{-1}}{\vdash} B$.

(ii) Dacă $B \overset{C}{\vdash} B'$ şi $B' \overset{C'}{\vdash} B''$, atunci $B \overset{C\cdot C'}{\vdash} B''$.

Exemplu: În spaţiul vectorial $\mathbb{R}^3$ fie baza canonică $B_c = \{e_1, e_2, e_3\}$ şi $B' = \{v'_1 = (1,1,1), v'_2 = (0,1,1), v'_3 = (0,0,1)\}$ o altă bază (verificaţi!) şi fie vectorul $x = (1,2,3)$.

Formulele de schimbare a bazelor sunt

$$B_c \overset{C}{\vdash} B' : \begin{cases} v'_1 = e_1 + e_2 + e_3 \\ v'_2 = e_2 + e_3 \\ v'_3 = e_3 \end{cases} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculăm

$$C^{-1} = \frac{1}{\det C} \cdot C^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Notăm

$$x_{B_c} = (1,2,3), x_{B'} = (x'_1, x'_2, x'_3).$$

Conform Propoziţiei 1.4.1 avem:

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x'_B = (1,1,1), x = v'_1 + v'_2 + v'_3.$$

1.5 Subspaţii vectoriale. Subspaţiul vectorial generat

Definiţia 1.5.1 Fie $(V, +, \cdot, \mathbb{K})$ un spaţiu vectorial şi fie $U \subseteq V, U \neq \emptyset$. Submulţimea U se numeşte *subspaţiu vectorial* al lui V dacă:
(i) $\forall\ x, y \in U$ avem $x + y \in U$
(ii) $\forall\ x \in U,\ \alpha \in \mathbb{K}$ avem $\alpha \cdot x \in U$
şi operaţiile induse pe U verifică axiomele din definiţia spaţiului vectorial.

Altfel spus, U este un spaţiu vectorial peste $\mathbb{K}$ în raport cu operaţiile induse pe U.

Teorema 1.5.1 (Teorema de caracterizare a subspaţiilor vectoriale) $\emptyset \neq U \subseteq V$ *este subspaţiu vectorial al lui* V *dacă şi numai dacă* $\forall\ x, y \in U,\ \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, *avem* $\alpha \cdot x + \beta \cdot y \in U$.

Demonstraţie: "$\Rightarrow$" Conform Definiţiei 1.5.1 (ii), $\forall\ x \in U, \alpha \in \mathbb{K}$ avem $\alpha \cdot x \in U$; $\forall\ y \in U,\ \beta \in \mathbb{K}$ avem $\beta \cdot y \in U$. Utilizăm acum (i) şi obţinem $\alpha \cdot x + \beta \cdot y \in U\ \forall\ x, y \in U,\ \alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

"$\Leftarrow$" Fie $x = y \in U$, $\alpha = 1$ şi $\beta = -1$; avem $x - x \in U$, adică $0_V \in U$; prin definiţie, $0_U = 0_V$.

Fie $\alpha = 1$ şi $\beta = 1$; $\forall\ x, y \in U$, avem $x + y \in U$, deci are loc (i).

Fie $\alpha = k \in \mathbb{K}$ şi $\beta = 0$; $\forall\ x \in U$, avem $k \cdot x \in U$ şi atunci are loc (ii).

$\forall\ x, y, z \in V$, avem $(x + y) + z = x + (y + z)$ şi $x + y = y + x$, ($(V, +)$ fiind grup comutativ. Din $U \subseteq V$ deducem că egalităţile de mai sus au loc $\forall x, y, z \in U$.

Evident $0_U = 0_V$ este element neutru. În plus, $\forall\ x \in U$, avem $(-1) \cdot x \in U$; $1 \cdot x + (-1) \cdot x = x - x = 0_U$, deci orice element e simetrizabil.

Deducem că $(U, +)$ este grup comutativ.

Deoarece $\alpha \cdot (x+y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y,\ \forall\ \alpha \in \mathbb{K},\ x, y \in V,\ U \subseteq V$, avem $\alpha \cdot (x+y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y,\ \forall\ x, y \in U$. Analog se verifică axiomele II.2, II.3 şi II.4.$\diamondsuit$

Observaţia 1.5.1 (i) Orice spaţiu vectorial V are cel puţin două subspaţii: $U = \{0_V\}$ şi $U = V$; acestea se numesc *subspaţii vectoriale improprii*. Orice alt subspaţiu vectorial se numeşte *subspaţiu propriu*.

(ii) Fie $\emptyset \neq U \subseteq V$ un subspaţiu vectorial al lui V. Atunci avem:

$$0 \leq \dim_{\mathbb{K}} U \leq \dim_{\mathbb{K}} V.$$

(iii) Dacă $\emptyset \neq U \subseteq V$ este subspaţiu vectorial al lui V şi $\dim_{\mathbb{K}} U = \dim_{\mathbb{K}} V$ atunci $U = V$.

(iv) Dimensiunea oricărui subspaţiu propriu U verifică inegalităţile $0 < \dim_{\mathbb{K}} U < \dim_{\mathbb{K}} V$.

Vom justifica acum afirmaţiile (ii) şi (iii).

(ii) Fie $\dim_{\mathbb{K}} V = n$; din Teorema 1.3.4, orice bază a spaţiului vectorial V are n vectori, deci orice bază a lui U are cel mult n vectori (ea este formată din vectori liniar independenţi; conform Teoremei 1.3.3, numărul vectorilor liniar independenţi nu-l depăşeşte pe cel al vectorilor bazei).

(iii) Fie $\dim_{\mathbb{K}} V = \dim_{\mathbb{K}} U = n$ şi $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ o bază în U.

$B \subset V$ este un sistem liniar independent ce are n elemente, iar $\dim_{\mathbb{K}} V = n$; conform Observaţiei 1.3.2, B este o bază pentru V.

$\forall\ x \in V,\ x = k_1 \cdot e_1 + k_2 \cdot e_2 + \cdots + k_n \cdot e_n$, U fiind un subspaţiu vectorial al lui V, obţinem $x \in U$, deci $V \subseteq U$. Avem $U \subseteq V$ şi $V \subseteq U$, adică $V = U$. $\diamondsuit$

Propoziţia 1.5.1 *Fie $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset V$ un sistem de vectori. Atunci*

$$\langle S \rangle = \{\alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \cdots + \alpha_n \cdot v_n |\ \alpha_1, \ldots \alpha_n \in \mathbb{K}\}$$

este un subspaţiu vectorial al lui V, numit subspaţiul vectorial generat de S.

Demonstraţie: Folosim Teorema 1.5.1. Pentru orice $x, y \in \langle S \rangle$, putem scrie $x = \sum\limits_{i \in I} \alpha_i \cdot v_i,\ \ y = \sum\limits_{i \in I} \beta_i \cdot v_i$, unde $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{K},\ \forall i \in I,\ I \subseteq \{1, \ldots, n\}$.

$\forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, avem:

$$\alpha \cdot x + \beta \cdot y = \alpha \cdot \sum_{i \in I} \alpha_i \cdot v_i + \beta \cdot \sum_{i \in I} \beta_i \cdot v_i = \sum_{i \in I} (\alpha \alpha_i + \beta \beta_i) \cdot v_i,$$

unde $\alpha \alpha_i + \beta \beta_i \in \mathbb{K}, \forall i \in I$.

Rezultă $\alpha \cdot x + \beta \cdot y \in \langle S \rangle$, deci $\langle S \rangle$ este un subspaţiu vectorial al lui V. $\diamondsuit$

Observăm că $\langle S \rangle$ este mulţimea tuturor combinaţiilor finite de elemente din S. De asemenea, $\langle S \rangle = \langle \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \rangle$ se notează adesea cu $\langle v_1, v_2, \ldots, v_n \rangle$, renunţându-se la acolade.

1.6 Operaţii cu subspaţii vectoriale

Propoziţia 1.6.1 *Fie $(V,+,\cdot,\mathbb{K})$ un spaţiu vectorial şi U_1, U_2 subspaţii vectoriale ale lui V. Atunci $U_1 \cap U_2$ şi $U_1 + U_2 = \{x_1 + x_2 |\ x_1 \in U_1$ şi $x_2 \in U_2\}$ sunt subspaţii vectoriale ale lui V, numite subspaţiul intersecţie şi subspaţiul sumă a două subspaţii vectoriale.*

Demonstraţie: Folosim Teorema 1.5.1.

Fie $x, y \in U_1 \cap U_2$ arbitrare. Avem $x, y \in U_1$ şi $x, y \in U_2$.

$\forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $\alpha \cdot x + \beta \cdot y \in U_1$, deoarece U_1 este subspaţiu vectorial al lui V; $\alpha \cdot x + \beta \cdot y \in U_2$, U_2 fiind subspaţiu vectorial al lui V. Obţinem $\alpha \cdot x + \beta \cdot y \in U_1 \cap U_2$, deci $U_1 \cap U_2$ este subspaţiu vectorial.

$\forall\ x, y \in U_1 + U_2$, $\exists\ x_1 \in U_1$, $x_2 \in U_2$ astfel încât $x = x_1 + x_2$ şi $\exists\ y_1 \in U_1$, $y_2 \in U_2$ astfel încât $y = y_1 + y_2$.

Fie $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ arbitrare. Putem scrie $\alpha \cdot x + \beta \cdot y = \alpha \cdot (x_1 + x_2) + \beta \cdot (y_1 + y_2) = \alpha \cdot x_1 + \alpha \cdot x_2 + \beta \cdot y_1 + \beta \cdot y_2 = \alpha \cdot x_1 + \beta \cdot y_1 + \alpha \cdot x_2 + \beta \cdot y_2$ Dar $\alpha \cdot x_1 + \beta \cdot y_1 \in U_1$, U_1 fiind subspaţiu vectorial al lui V, iar $\alpha \cdot x_2 + \beta \cdot y_2 \in U_2$, deoarece U_2 este subspaţiu vectorial al lui V.

În concluzie, $\alpha \cdot x + \beta \cdot y \in U_1 + U_2$, deci $U_1 + U_2$ este subspaţiu vectorial.$\Diamond$

Observaţia 1.6.1 (i) În general reuniunea a două subspaţii vectoriale nu este subspaţiu vectorial. Pentru a justifica aceasta, să considerăm mulţimile

$$U_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ x = 2y\}$$

$$U_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ x = 3y\}$$

Arătăm că U_1 şi U_2 sunt subspaţii vectoriale ale spaţiului vectorial $\mathbb{R}^2$.

$\forall\ (x, y), (x', y') \in U_1$, $\forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, avem:

$$\alpha \cdot (x, y) + \beta \cdot (x', y') = (\alpha x + \beta x', \alpha y + \beta y')$$

Din $(x, y) \in U_1$ avem $x = 2y$, iar din $(x', y') \in U_1$ avem $x' = 2y'$. Rezultă că $\alpha x + \beta x' = 2\alpha y + 2\beta y' = 2(\alpha y + \beta y')$, de unde $(\alpha x + \beta x', \alpha y + \beta y') \in U_1$, deci U_1 este subspaţiu vectorial al lui $\mathbb{R}^2$.

În acelaşi mod se verifică faptul că U_2 este subspaţiu vectorial al lui $\mathbb{R}^2$.

Conform definiţiei, $U_1 \cup U_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ (x, y) \in U_1$ sau $(x, y) \in U_2\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ x = 2y$ sau $x = 3y\}$. Fie $v_1 = (1, \frac{1}{2}) \in U_1 \cup U_2$ şi $v_2 = (3, 1) \in U_1 \cup U_2$. Evident $v_1 + v_2 = (4, \frac{3}{2}) \notin U_1 \cup U_2$.

(ii) Are loc egalitatea $U_1 + U_2 = \langle U_1 \cup U_2 \rangle$.

(iii) Se pot defini subspaţiile intersecţie şi sumă pentru n subspaţii vectoriale:

$$U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_n = \{x |\ x \in U_k,\ k = \overline{1,n}\}$$

$$U_1 + U_2 + \cdots + U_n = \{x |\ x = x_1 + x_2 + \cdots + x_n,\ x_k \in U_k, k = \overline{1,n}\}$$

Definiţia 1.6.1 Fie U_1 şi U_2 subspaţii vectoriale ale spaţiului vectorial V astfel încât $U_1 \cap U_2 = \{0_V\}$. În acest caz, subspaţiul sumă $U_1 + U_2$ se numeşte *sumă directă* de subspaţii vectoriale şi se notează cu $U_1 \oplus U_2$.

Dacă $U_1 \oplus U_2 = V$ subspaţiile U_1 şi U_2 se numesc *subspaţii vectoriale suplementare.*

Definiţia 1.6.2 Fie $U_1, U_2, \ldots, U_n$ subspaţii vectoriale ale spaţiului vectorial V. Dacă pentru orice $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ avem $U_i \cap \sum\limits_{j=\overline{1,n}, j\neq i} U_j = \emptyset$, spunem că suma $\sum\limits_{i=\overline{1,n}} U_i$ este directă şi o notăm cu $\bigoplus\limits_{i=\overline{1,n}} U_i$.

Teorema 1.6.1 (Teorema dimensiunii; Grassmann) *Fie* $(V, +, \cdot, \mathbb{K})$ *un spaţiu vectorial şi* U_1, U_2 *subspaţii vectoriale ale lui* V. *Atunci avem:*

$$\dim_{\mathbb{K}}(U_1 + U_2) = \dim_{\mathbb{K}} U_1 + \dim_{\mathbb{K}} U_2 - \dim_{\mathbb{K}}(U_1 \cap U_2).$$

Demonstraţie: Notăm $k = \dim_{\mathbb{K}}(U_1 \cap U_2)$, $m = \dim_{\mathbb{K}} U_1$ şi $n = \dim_{\mathbb{K}} U_2$.

Fie $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$ o bază în $U_1 \cap U_2 \subset U_1$.

Conform Teoremei 1.3.2, baza B poate fi completată până la o bază $B_1 = \{e_1, e_2, \ldots, e_k, f_{k+1}, \ldots, f_m\}$ a subspaţiului vectorial U_1 respectiv până la o bază $B_2 = \{e_1, e_2, \ldots, e_k, g_{k+1}, \ldots, g_n\}$ a subspaţiului vectorial U_2.

Vom pune în evidenţă o bază a subspaţiului sumă $U_1 + U_2$.

Fie $x \in U_1 + U_2$ arbitrar; conform Definiţiei 1.5.1, $\exists x_1 \in U_1, x_2 \in U_2$ astfel încât $x = x_1 + x_2$.

Aplicăm Teorema 1.3.5 pentru $x_1 \in U_1$ şi obţinem că $\exists \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{K}$ unici astfel încât

$$x_1 = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_k e_k + \alpha_{k+1} f_{k+1} + \cdots + \alpha_m f_m$$

În acelaşi mod, din $x_2 \in U_2$ avem că $\exists \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n \in \mathbb{K}$ unici astfel încât

$$x_2 = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \cdots + \beta_k e_k + \beta_{k+1} g_{k+1} + \cdots + \beta_n g_n$$

Atunci putem scrie $x = x_1 + x_2 = (\alpha_1 + \beta_1)e_1 + (\alpha_2 + \beta_2)e_2 + \cdots + (\alpha_k + \beta_k)e_k + \alpha_{k+1} f_{k+1} + \alpha_{k+2} f_{k+2} + \cdots + \alpha_m f_m + \beta_{k+1} g_{k+1} + \cdots + \beta_n g_n$

deci $B' = \{e_1, e_2, \ldots, e_k, f_{k+1}, \ldots, f_m, g_{k+1}, \ldots, g_n\}$ este un sistem de generatori pentru $U_1 + U_2$.

Arătăm că B' este un sistem liniar independent.

Fie $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \beta_{k+1}, \ldots, \beta_n \in \mathbb{K}$ astfel încât

$$\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_k e_k + \alpha_{k+1} f_{k+1} + \cdots + \alpha_m f_m + \beta_{k+1} g_{k+1} + \cdots + \beta_n g_n = 0_V \quad (*)$$

Cazul I. Dacă $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_m = 0$ rezultă că $\beta_{k+1} g_{k+1} + \cdots + \beta_n g_n = 0_V$. B_2 fiind sistem liniar independent, din Propoziţia 1.2.1 (ii) obţinem că $\{g_{k+1}, \ldots, g_n\} \subset B_2$ este un sistem liniar independent, deci $\beta_{k+1} = \cdots = \beta_n = 0$. Din $(*)$ rezultă că B' este un sistem liniar independent.

Cazul II. Nu toţi $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ sunt nuli.

Fie $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_k e_k + \alpha_{k+1} f_{k+1} + \cdots + \alpha_m f_m$. Observăm că $x \in U_1, x \neq 0_V$ (altfel B_1 ar fi sistem liniar dependent).

Din relaţia $(*)$ obţinem

$$-x = \beta_{k+1} g_{k+1} + \cdots + \beta_n g_n \quad (**)$$

U_2 fiind subspaţiu vectorial al lui V, $\beta_{k+1} g_{k+1} + \cdots + \beta_n g_n \in U_2$ (deoarece $g_{k+1}, \ldots, g_n \in B_2$), adică $x \in U_2$.

Pe de altă parte, $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_k e_k + \alpha_{k+1} f_{k+1} + \cdots + \alpha_m f_m \in U_1$.

În concluzie, $x \in U_1 \cap U_2$. $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$ este bază a subspaţiului $U_1 \cap U_2$, deci $\exists \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k \in \mathbb{K}$ unici astfel încât $x = \gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2 + \cdots + \gamma_k e_k$, iar $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$ nu pot fi toţi 0 (altfel $x = 0_V$).

Înlocuind x din $(**)$ găsim

$$\gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2 + \cdots + \gamma_k e_k + \beta_{k+1} g_{k+1} + \cdots + \beta_n g_n = 0_V$$

ceea ce implică $\gamma_1 = \gamma_2 = \cdots = \gamma_k = \beta_{k+1} = \cdots = \beta_n = 0$.

Din $(*)$ obţinem $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_k e_k + \alpha_{k+1} f_{k+1} + \cdots + \alpha_m f_m = 0_V$, adică $x = 0_V$; contradicţie.

Deci singura posibilitate este $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_m = 0$. Am arătat astfel că B' este o bază a subspaţiului vectorial $U_1 + U_2$. Acum putem preciza dimensiunea acestui subspaţiu:

$$\dim_{\mathbb{K}}(U_1 + U_2) = m + (n - k) = \dim_{\mathbb{K}} U_1 + \dim_{\mathbb{K}} U_2 - \dim_{\mathbb{K}}(U_1 \cap U_2) \diamondsuit$$

Observaţia 1.6.2 Dacă $U_1 \cap U_2 = \{0_V\}$, atunci $U_1 + U_2 = U_1 \oplus U_2$. În acest caz, $\dim_{\mathbb{K}}(U_1 \oplus U_2) = \dim_{\mathbb{K}} U_1 + \dim_{\mathbb{K}} U_2$.

Capitolul 2

Aplicaţii liniare

Noţiunile de bază ale algebrei liniare sunt *spaţiul vectorial* şi *aplicaţia liniară.* Aplicaţiile liniare sunt aplicaţii între spaţii vectoriale, compatibile cu structurile de spaţiu vectorial.

2.1 Aplicaţii liniare. Izomorfisme de spaţii vectoriale

Definiţia 2.1.1 Fie $(V_1, +, \cdot, \mathbb{K})$ şi $(V_2, +, \cdot, \mathbb{K})$ spaţii vectoriale peste acelaşi corp comutativ $\mathbb{K}$. Se numeşte *aplicaţie liniară (morfism de spaţii vectoriale)* de la V_1 la V_2 o aplicaţie $f : V_1 \to V_2$ cu proprietăţile:

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \ \forall \ x, y \in V_1$$

$$f(\alpha \cdot x) = \alpha \cdot f(x), \ \forall \ \alpha \in \mathbb{K}, \ x \in V_1.$$

Dacă $V_1 = V_2 = V$, aplicaţia liniară $f : V \to V$ se numeşte *endomorfism* sau *operator liniar.*

Vom nota mulţimea aplicaţiilor liniare de la V_1 la V_2 prin

$$\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(V_1, V_2) = \{f : V_1 \to V_2 |\ f \text{ liniară}\}$$

Mulţimea endomorfismelor spaţiului vectorial V va fi notată astfel:

$$\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(V) = \{f : V \to V |\ f \text{ liniară}\}$$

Observaţia 2.1.1 Condiţiile din Definiţia 2.1.1 se scriu sub forma echivalentă

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y), \ \forall \ x, y \in V_1, \ \alpha, \beta \in \mathbb{K}.$$

Exemple: (i) Dacă $(V, +, \cdot, \mathbb{K})$ este spaţiu vectorial, iar $\emptyset \neq U \subseteq V$ este un subspaţiu vectorial al lui V, aplicaţia

$$i : U \to V, i(x) = x, \ \forall \ x \in U$$

este o aplicaţie liniară, numită aplicaţia de incluziune.

(ii) Fie $n \in \mathbb{N}$ fixat, $1 \leq k \leq n$, iar $p_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ este definită astfel:

$$p_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_k$$

Aplicaţia p_k este o aplicaţie liniară, numită proiecţia de indice k.

Observaţia 2.1.2 Mulţimea $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(V_1, V_2)$ are o structură de spaţiu vectorial peste corpul $\mathbb{K}$ în raport cu operaţiile

$+ : \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(V_1, V_2) \times \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(V_1, V_2) \longrightarrow \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(V_1, V_2), \ (f, g) \mapsto f + g$

$\cdot : \mathbb{K} \times \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(V_1, V_2) \longrightarrow \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(V_1, V_2), \ (k, f) \mapsto k \cdot f$

unde $f + g : V_1 \to V_2$ se defineşte prin $(f + g)(x) = f(x) + g(x), \ \forall \ x \in V_1$, iar $k \cdot f : V_1 \to V_2$ se defineşte astfel: $(k \cdot f)(x) = k \cdot f(x), \ \forall \ x \in V_1$.

Pentru a justifica această afirmaţie, observăm mai întâi faptul că $f + g$ şi $k \cdot f$ sunt aplicaţii liniare:

pentru $x, y \in V_1$ şi $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ oarecare, avem:

$(f + g)(\alpha x + \beta y) = f(\alpha x + \beta y) + g(\alpha x + \beta y) = \alpha(f + g)(x) + \beta(f + g)(y)$

$(k \cdot f)(\alpha x + \beta y) = k \cdot f(\alpha x + \beta y) = k\alpha f(x) + k\beta f(y) = \alpha(kf)(x) + \beta(kf)(y)$

Verificăm acum axiomele din definiţia spaţiului vectorial.

I. $(\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(V_1, V_2), +)$ este grup comutativ

1) $\forall \ f, g, h \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(V_1, V_2), \forall x \in V_1$, putem scrie

$((f+g)+h)(x) = (f+g)(x)+h(x) = (f(x)+g(x))+h(x) = f(x)+(g(x)+h(x)) = f(x) + (g + h)(x) = (f + (g + h))(x)$,

de unde rezultă $(f + g) + h = f + (g + h)$

2) Arătăm că $\exists e \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(V_1, V_2)$ astfel încât $\forall \ f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(V_1, V_2)$ să avem $e + f = f + e = f$, sau, echivalent,

$$(e + f)(x) = (f + e)(x) = f(x), \ \forall \ x \in V_1$$

Găsim că $e : V_1 \to V_2$ este definită prin $e(x) = 0_{V_2}, \ \forall \ x \in V_1$.

3) Arătăm că $\forall \ f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(V_1, V_2), \ \exists f' \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(V_1, V_2)$ astfel încât $f + f' = f' + f = e$, sau, echivalent,

$$(f + f')(x) = (f' + f)(x) = e(x), \ \forall \ x \in V_1$$

Obţinem $f' : V_1 \to V_2, f'(x) = -f(x), \ \forall \ x \in V_1$.

4) $\forall\ f, g \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(V_1, V_2)$, avem $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g+f)(x),\ \forall\ x \in V_1$, adică $f + g = g + f$.

II. 1) $\forall\ f, g \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(V_1, V_2), k \in \mathbb{K}, \forall x \in V_1$, avem

$$(k \cdot (f+g))(x) = k \cdot (f+g)(x) = k \cdot f(x) + k \cdot g(x) = (k \cdot f + k \cdot g)(x),$$

de unde rezultă $k \cdot (f+g) = k \cdot f + k \cdot g$

Analog se verifică axiomele II.2, II.3 şi II.4.

Observaţia 2.1.3 Compunerea a două aplicaţii liniare este tot o aplicaţie liniară. Justificarea este următoarea:

dacă $f : V_1 \to V_2$ şi $g : V_2 \to V_3$ sunt aplicaţii liniare, pentru orice $x, y \in V_1$ şi orice $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ avem $(g \circ f)(\alpha x + \beta y) = g(f(\alpha x + \beta y)) = g(\alpha f(x) + \beta f(y)) = \alpha g(f(x)) + \beta g(f(y))$, în concluzie $g \circ f : V_1 \to V_3$ este o aplicaţie liniară.

Definiţia 2.1.2 O aplicaţie liniară $f : V_1 \longrightarrow V_2$ care este injectivă se numeşte *monomorfism*. Dacă $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(V_1, V_2)$ este surjectivă, atunci f se numeşte *epimorfism*. Un *izomorfism de spaţii vectoriale* este o aplicaţie liniară bijectivă. În acest caz, vom spune că spaţiile vectoriale V_1 şi V_2 sunt *spaţii vectoriale izomorfe*. Dacă $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(V)$ este bijectivă, f se numeşte *automorfism* al spaţiului vectorial V.

Propoziţia 2.1.1 *(i) Dacă $f : V_1 \to V_2$ este un izomorfism de spaţii vectoriale, atunci $f^{-1} : V_2 \to V_1$ este izomorfism de spaţii vectoriale.*

(ii) Dacă $f : V_1 \to V_2$ şi $g : V_2 \to V_3$ sunt izomorfisme de spaţii vectoriale, atunci $g \circ f : V_1 \to V_3$ este un izomorfism de spaţii vectoriale.

Demonstraţie: Fie f bijectivă. Evident, f^{-1} este bijectivă.

Arătăm că $f^{-1} \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(V_2, V_1)$, adică

$$f^{-1}(\alpha x + \beta y) = \alpha f^{-1}(x) + \beta f^{-1}(y),\ \forall\ x, y \in V_2,\ \alpha, \beta \in \mathbb{K}.$$

Pornim de la identitatea $(f \circ f^{-1})(\alpha x + \beta y) = \alpha x + \beta y, \forall x, y \in V_2, \alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

Pe de altă parte, f fiind liniară, putem scrie $\alpha x + \beta y = \alpha(f \circ f^{-1})(x) + \beta(f \circ f^{-1})(y) = f(\alpha f^{-1}(x)) + f(\beta f^{-1}(y)) = f(\alpha f^{-1}(x) + \beta f^{-1}(y))$.

În acest fel, am obţinut $f(f^{-1}(\alpha x + \beta y)) = f(\alpha f^{-1}(x) + \beta f^{-1}(y))$. Pe baza injectivităţii lui f, deducem

$$f^{-1}(\alpha x + \beta y) = \alpha f^{-1}(x) + \beta f^{-1}(y)$$

(ii) Fie $f : V_1 \longrightarrow V_2, g : V_2 \longrightarrow V_3$; atunci $\exists g \circ f : V_1 \to V_3$. În plus, f, g fiind bijective, $g \circ f$ este bijectivă.

Arătăm că $g \circ f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(V_1, V_3)$:

$\forall\, x, y \in V_1,\ \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, din liniaritatea aplicaţiilor f şi g, avem următoarele egalităţi: $(g \circ f)(\alpha x + \beta y) = g(f(\alpha x + \beta y)) = g(\alpha f(x) + \beta f(y)) = \alpha g(f(x)) + \beta g(f(y)) = \alpha(g \circ f)(x) + \beta(g \circ f)(y)$.$\diamondsuit$

În continuare vom stabili un criteriu de izomorfism al spaţiilor vectoriale.

Teorema 2.1.1 *(i) Orice spaţiu vectorial n-dimensional este izomorf cu spaţiul vectorial $\mathbb{K}^n$.*

(ii) Fie $(V_1, +, \cdot, \mathbb{K})$ şi $(V_2, +, \cdot, \mathbb{K})$ spaţii vectoriale finit dimensionale. V_1 şi V_2 sunt izomorfe $\Leftrightarrow \dim_{\mathbb{K}} V_1 = \dim_{\mathbb{K}} V_2$.

Demonstraţie: (i) Fie $(V, +, \cdot, \mathbb{K})$ un spaţiu vectorial astfel încât $\dim_{\mathbb{K}} V = n$ şi fie $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ o bază a lui V.

Definim $f : \mathbb{K}^n \to V$ prin

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n,\ \forall\, x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n.$$

Demonstrăm că f este un izomorfism de spaţii vectoriale. Verificăm mai întâi că f este liniară:

$f(\alpha x + \beta y) = f(\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2, \ldots, \alpha x_n + \beta y_n) = (\alpha x_1 + \beta y_1)e_1 + (\alpha x_2 + \beta y_2)e_2 + \cdots + (\alpha x_n + \beta y_n)e_n = \alpha(x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n) + \beta(y_1 e_1 + y_2 e_2 + \cdots + y_n e_n) = \alpha f(x) + \beta f(y), \forall\, x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{K}^n,\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

Să arătăm acum că f este bijectivă. Fie $x, y \in \mathbb{K}^n$ astfel încât $f(x) = f(y)$. Din definiţia lui f obţinem

$$x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n = y_1 e_1 + y_2 e_2 + \cdots + y_n e_n$$

Conform Teoremei 1.3.5 rezultă $x_1 = y_1,\ x_2 = y_2, \ldots, x_n = y_n$, sau, echivalent, $x = y$, deci f este injectivă.

Fie $v \in V$ arbitrar. B fiind bază, din Teorema 1.3.5 $\exists \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ unici astfel încât $v = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n$.

Luăm $x = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ şi avem $v = f(x)$, deci f este surjectivă.

(ii) "$\Rightarrow$" Presupunem că V_1 şi V_2 sunt spaţii vectoriale izomorfe, adică $\exists\ f : V_1 \to V_2$ aplicaţie liniară şi bijectivă. Fie $n = \dim_{\mathbb{K}} V_1$ şi fie $B_1 = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ o bază a spaţiului vectorial V_1.

Vom demonstra că $B_2 = \{f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n)\}$ este o bază a spaţiului vectorial V_2.

$\forall\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ astfel încât $\alpha_1 f(e_1) + \alpha_2 f(e_2) + \cdots + \alpha_n f(e_n) = 0_{V_2}$, din liniaritatea lui f avem

$$f(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n) = 0_{V_2}$$

Pe de altă parte $0_{V_2} = f(0_{V_1})$, de unde rezultă

$$f(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n) = f(0_{V_1}).$$

f fiind injectivă, obţinem $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n = 0_{V_1}$. Utilizăm faptul că B_1 este bază şi găsim $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$, deci B_2 este un sistem liniar independent.

Trebuie să mai verificăm doar faptul că B_2 este un sistem de generatori pentru spaţiul vectorial V_2.

Fie $y \in V_2$ arbitrar. f fiind surjectivă, $\exists\ x \in V_1$ astfel încât $y = f(x)$.

Aplicăm Teorema 1.3.5 pentru $x \in V_1$ şi B_1 - bază a spaţiului vectorial $V_1 : \exists\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ unici astfel încât

$$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n$$

În concluzie, am obţinut următoarele egalităţi:

$$y = f(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n) = \alpha_1 f(e_1) + \alpha_2 f(e_2) + \cdots + \alpha_n f(e_n)$$

B_2 fiind bază a spaţiului vectorial V_2, $\dim_{\mathbb{K}} V_2 = n = \dim_{\mathbb{K}} V_1$.

"$\Leftarrow$" Presupunem că $\dim_{\mathbb{K}} V_1 = \dim_{\mathbb{K}} V_2 = n$ şi demonstrăm că V_1 şi V_2 sunt spaţii izomorfe.

Din $\dim_{\mathbb{K}} V_1 = n$, pe baza afirmaţiei (i) rezultă că $\exists\ f : \mathbb{K}^n \to V_1$ izomorfism de spaţii vectoriale. În acelaşi mod, $\exists\ g : \mathbb{K}^n \to V_2$ izomorfism.

Conform Propoziţiei 2.1.1 (i), f^{-1} este izomorfism. Aplicăm acum Propoziţia 2.1.1 (ii) pentru f^{-1} şi g şi deducem că $g \circ f^{-1} : V_1 \to V_2$ este un izomorfism de spaţii vectoriale. $\diamondsuit$

2.2 Nucleul şi imaginea unei aplicaţii liniare

Definiţia 2.2.1 Fie $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(V_1, V_2)$. Se numeşte *nucleul* aplicaţiei liniare f mulţimea

$$\mathrm{Ker} f = \{x \in V_1 |\ f(x) = 0_{V_2}\} = f^{-1}(0_{V_2}) \subseteq V_1$$

Mulţimea

$$\mathrm{Im} f = \{y \in V_2 |\ \exists\ x \in V_1 \text{ astfel încât } y = f(x)\} = \{f(x) |\ x \in V_1\} \subseteq V_2$$

se numeşte *imaginea* aplicaţiei liniare f.

Proprietăţile nucleului şi imaginii unei aplicaţii liniare sunt cuprinse în următoarea propoziţie:

Propoziţia 2.2.1 *Fie* $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(V_1, V_2)$.

(i) $\mathrm{Ker} f$ *este subspaţiu vectorial al spaţiului vectorial* V_1.

(ii) $\mathrm{Im} f$ *este subspaţiu vectorial al spaţiului vectorial* V_2.

(iii) f *este monomorfism* $\Leftrightarrow \mathrm{Ker} f = \{0_{V_1}\}$.

Demonstraţie: (i) $\forall\ x, y \in \mathrm{Ker} f,\ \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, avem

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y) = \alpha \cdot 0_{V_2} + \beta \cdot 0_{V_2} = 0_{V_2}$$

adică $\alpha x + \beta y \in \mathrm{Ker} f$.

Pe baza Teoremei 1.5.1 rezultă că $\mathrm{Ker} f$ este subspaţiu vectorial al spaţiului vectorial V_1.

(ii) Utilizăm din nou Teorema 1.5.1.

Fie $x, y \in \mathrm{Im} f$ oarecare. $\exists\ x', y' \in V_1$ astfel încât $f(x') = x$ şi $f(y') = y$.

Deoarece f este liniară,

$$\alpha x + \beta y = \alpha f(x') + \beta f(y') = f(\alpha x') + f(\beta y') = f(\alpha x' + \beta y')$$

unde $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Dar $\alpha x' + \beta y' \in V_1$, de unde rezultă că $\alpha x' + \beta y' \in \mathrm{Im} f$.

(iii) "$\Rightarrow$" Fie $f : V_1 \to V_2$ o aplicaţie liniară injectivă. Fie $x \in \mathrm{Ker} f$ arbitrar; $f(x) = 0_{V_2}$.

Pe de altă parte, $0_{V_2} = f(0_{V_1})$; f fiind injectivă, avem $x = 0_{V_1}$, deci $\mathrm{Ker} f = \{0_{V_1}\}$.

"$\Leftarrow$" Presupunem că $\mathrm{Ker} f = \{0_{V_1}\}$ şi arătăm că f este monomorfism.

$\forall\ x, y \in V_1$ astfel încât $f(x) = f(y)$ putem scrie $f(x) - f(y) = 0_{V_2}$ sau, echivalent, $f(x - y) = 0_{V_2}$. Din $\mathrm{Ker} f = \{0_{V_1}\}$ rezultă $x - y = 0_{V_1}$, adică $x = y$, deci f este injectivă. $\diamondsuit$

Definiţia 2.2.2 Se numeşte *defectul* aplicaţiei liniare f numărul

$$\mathrm{def} f = \dim_{\mathbb{K}}(\mathrm{Ker} f),$$

iar *rangul* aplicaţiei liniare f este numărul

$$\mathrm{rang} f = \dim_{\mathbb{K}}(\mathrm{Im} f).$$

Teorema 2.2.1 (Teorema rangului) *Dacă* V_1 *şi* V_2 *sunt spaţii vectoriale finit dimensionale, atunci avem:*

$$\dim_{\mathbb{K}}(\mathrm{Ker} f) + \dim_{\mathbb{K}}(\mathrm{Im} f) = \dim_{\mathbb{K}} V_1.$$

Demonstraţie: Fie $\dim_{\mathbb{K}} V_1 = n$ şi fie $\dim_{\mathbb{K}}(\mathrm{Ker} f) = m$.

$\mathrm{Ker} f$ fiind subspaţiu vectorial al spaţiului vectorial V_1, $m \leq n$.

Fie $B_1 = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ o bază a spaţiului vectorial $\mathrm{Ker} f$; din $e_k \in \mathrm{Ker} f,\ k = \overline{1,m}$ rezultă $f(e_k) = 0,\ k = \overline{1,m}$.

Conform Teoremei 1.3.2, B_1 se poate completa la o bază a spaţiului vectorial V_1. Fie $B = \{e_1, e_2, \dots, e_m, e_{m+1}, \dots, e_n\}$ această bază.

Cu ajutorul elementelor $\{e_{m+1}, \dots, e_n\}$ vom construi o bază a subspaţiului vectorial $\mathrm{Im} f$.

De fapt, vom arăta că $B_2 = \{f(e_{m+1}), \dots, f(e_n)\}$ constituie o bază a spaţiului vectorial $\mathrm{Im} f$.

Fie $\alpha_{m+1}, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ astfel încât $\alpha_{m+1} f(e_{n+1}) + \dots + \alpha_n f(e_n) = 0_{V_2}$. Din liniaritatea lui f obţinem $f(\alpha_{m+1} e_{m+1} + \dots + \alpha_n e_n) = 0_{V_2}$ adică $\alpha_{m+1} e_{m+1} + \dots + \alpha_n e_n \in \mathrm{Ker} f$.

B_1 este bază a subspaţiului vectorial $\mathrm{Ker} f$; conform Teoremei 1.3.5 $\exists\ \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \in \mathbb{K}$ unici astfel încât $\alpha_{m+1} e_{m+1} + \dots + \alpha_n e_n = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_m e_m$ sau, echivalent, $\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_m e_m - \alpha_{m+1} e_{m+1} - \dots - \alpha_n e_n = 0_{V_1}$. Din faptul că B este bază a lui V_1 obţinem $\alpha_1 = \dots = \alpha_m = \alpha_{m+1} = \dots = \alpha_n = 0$, ceea ce arată că B_2 este sistem liniar independent.

Conform Definiţiei 2.2.1, $\forall\ y \in \mathrm{Im} f$, $\exists\ x \in V_1$ astfel încât $y = f(x)$. Aplicăm Teorema 1.3.5 pentru $x \in V_1$ şi B - bază a spaţiului vectorial V_1 şi găsim că $\exists\ \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ unici astfel încât $x = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$.

Atunci putem scrie $y = f(x) = f(\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n) = \alpha_1 f(e_1) + \dots + \alpha_m f(e_m) + \alpha_{m+1} f(e_{m+1}) + \dots + \alpha_n f(e_n) = \alpha_{m+1} f(e_{m+1}) + \dots + \alpha_n f(e_n)$; am utilizat $f(e_1) = \ldots = f(e_m) = 0_V$.

În concluzie, B_2 este sistem de generatori pentru $\mathrm{Im} f$. Fiind şi sistem liniar independent, este o bază, de unde rezultă $\dim_{\mathbb{K}}(\mathrm{Im} f) = n - m$. $\diamondsuit$

2.3 Aplicaţii liniare între spaţii vectoriale finit dimensionale

Fie V_1 şi V_2 spaţii vectoriale peste corpul comutativ $\mathbb{K}$, $\dim_{\mathbb{K}} V_1 = n$, $\dim_{\mathbb{K}} V_2 = m$ şi fie $B_1 = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ o bază în V_1 şi $B_2 = \{f_1, f_2, \dots, f_m\}$ o bază în V_2. Fie $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(V_1, V_2)$. Evident, $f(e_j) \in V_2$, $j = \overline{1,n}$. B_2 fiind o bază în V_2, $\exists\ a_{ij} \in \mathbb{K},\ i = \overline{1,m}$ unici astfel încât

$$f(e_j) = a_{1j} f_1 + a_{2j} f_2 + \dots + a_{mj} f_m,\ j = \overline{1,n} \qquad (*)$$

Definiţia 2.3.1 Matricea $M(f; B_1, B_2) = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, în care scriem pe coloane scalarii a_{ij} din relaţia $(*)$, se numeşte *matricea asociată*

aplicaţiei liniare f în raport cu bazele B_1 şi B_2. Aceasta se notează simplu cu $M(f)$ atunci când bazele B_1 şi B_2 sunt subînţelese din context.

Propoziţia 2.3.1 *Aplicaţia*

$$\mu : \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(V_1, V_2) \to \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}), \mu(f) = M(f)$$

este un izomorfism de spaţii vectoriale.

Demonstraţie: Arătăm că μ este aplicaţie liniară, adică

$$\mu(\alpha f + \beta g) = \alpha\mu(f) + \beta\mu(g), \ \forall\ f, g \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(V_1, V_2), \alpha, \beta \in \mathbb{K}$$

Conform $(*)$, $f(e_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} f_i,\ j = \overline{1,n}$; analog $g(e_j) = \sum_{i=1}^m b_{ij} f_i,\ j = \overline{1,n}$.

Putem scrie

$$(\alpha f + \beta g)(e_j) = \alpha f(e_j) + \beta g(e_j) = \sum_{i=1}^m (\alpha a_{ij} + \beta b_{ij}) f_i, j = \overline{1,n}$$

$$\mu(\alpha f + \beta g) = (\alpha a_{ij} + \beta b_{ij})_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}} = \alpha(a_{ij})_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}} + \beta(b_{ij})_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}} = \alpha\mu(f) + \beta\mu(g)$$

Arătăm că μ este monomorfism. Conform Propoziţiei 2.2.1 (iii), e suficient să demonstrăm că $\mathrm{Ker}\mu = \{0\}$, unde 0 este vectorul nul al spaţiului vectorial $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(V_1, V_2)$.

Fie $f \in \mathrm{Ker}\mu$ oarecare; $\mu(f) = 0_{m,n} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, adică $M(f) = 0_{m,n}$. Din (*) deducem că $f(e_j) = 0_{V_2},\ j = \overline{1,n}$.

Fie $x \in V_1$ arbitrar. B_1 fiind bază a lui V_1, $\exists\ x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$ unici astfel încât

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n$$

Din liniaritatea lui f rezultă

$$f(x) = f\left(\sum_{j=1}^n x_j e_j\right) = \sum_{j=1}^n x_j f(e_j) = 0_{V_2}$$

adică $f(x) = 0_{V_2},\ \forall\ x \in V_1$. Am arătat astfel că $f = 0$.

Arătăm acum că μ este epimorfism.

Fie $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. Definim $f : V_1 \to V_2$ prin

$$f(x) = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j\right) f_i, x = \sum_{j=1}^n x_j e_j$$

f este o aplicaţie liniară, deoarece

$f(\alpha x+\beta y)=\sum_{i=1}^{m}(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(\alpha x_j+\beta y_i))f_i=\sum_{i=1}^{m}(\alpha\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j+$
$+\beta\sum_{j=1}^{n}b_{ij}y_j)f_i=\alpha\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\right)f_i+\beta\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}b_{ij}y_j\right)f_i=$
$=\alpha f(x)+\beta f(y),\ \forall\ x,y\in V_1,\ \alpha,\beta\in\mathbb{K}$

Din definiţia lui f avem $f(e_j)=\sum_{i=1}^{m}a_{ij}f_i,\ j=\overline{1,n}$, de unde obţinem că $M(f)=(a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}$ şi $\mu(f)=A$. $\diamondsuit$

Observaţia 2.3.1 Pe baza Teoremei 2.1.1, putem preciza dimensiunea spaţiului vectorial $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(V_1,V_2)$:

$$\dim_{\mathbb{K}}[\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(V_1,V_2)]=\dim_{\mathbb{K}}[\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})]=m\cdot n$$

Propoziţia 2.3.2 *Fie $f\in\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(V_1,V_2)$, $B_1=\{e_1,e_2,\dots,e_n\}$ o bază a spaţiului vectorial V_1 şi $B_2=\{f_1,f_2,\dots,f_m\}$ o bază a spaţiului vectorial V_2. Dacă $x=x_1e_1+x_2e_2+\cdots+x_ne_n$ şi $y=f(x)=y_1f_1+y_2f_2+\cdots+y_mf_m$, atunci*

$$Y=M(f)\cdot X$$

unde

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},Y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_m\end{pmatrix}.$$

Demonstraţie: În relaţia $y=f(x)$ înlocuim expresiile vectorilor x şi y în bazele B_1 respectiv B_2 şi (ţinând cont de (*)) obţinem

$$y=\sum_{i=1}^{m}y_if_i$$

$$f(x)=f\left(\sum_{j=1}^{n}x_je_j\right)=\sum_{j=1}^{n}x_jf(e_j)=\sum_{j=1}^{n}x_j\left(\sum_{i=1}^{m}a_{ij}f_i\right)=\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\right)f_i$$

Conform Teoremei 1.3.5 vom avea $y_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j, i=\overline{1,m}$, sau, echivalent, $Y=M(f)\cdot X$. $\diamondsuit$

Relaţia de mai sus se numeşte *ecuaţia matriceală a aplicaţiei liniare f în raport cu bazele B_1 şi B_2.*

Propoziţia 2.3.3 *Fie V_1,V_2,V_3 spaţii vectoriale finit dimensionale peste acelaşi corp comutativ $\mathbb{K}$, $f\in\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(V_1,V_2)$ şi $g\in\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(V_2,V_3)$. Pentru aplicaţia liniară $g\circ f:V_1\to V_3$ avem:*

$$M(g\circ f)=M(g)\cdot M(f).$$

Demonstraţie: Fie $\dim_{\mathbb{K}}(V_1) = n$, $\dim_{\mathbb{K}}(V_2) = m$ şi $\dim_{\mathbb{K}}(V_3) = p$. Conform Definiţiei 2.3.1, $M(f) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}), M(g) \in \mathcal{M}_{p,m}(\mathbb{K})$ deci $M(g) \cdot M(f) \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.

Din Propoziţia 2.3.2 avem:

$Y = M(f) \cdot X, Z = M(g) \cdot Y$ şi $Z = M(g) \cdot (M(f) \cdot X) = (M(g) \cdot M(f)) \cdot X$

Pe de altă parte, ecuaţia matriceală a aplicaţiei liniare $g \circ f : V_1 \longrightarrow V_3$ este $Z = M(g \circ f) \cdot X$, de unde obţinem $(M(g \circ f) - M(g) \cdot M(f)) \cdot X = 0$ sau $M(g \circ f) - M(g) \cdot M(f) = 0$. $\diamondsuit$

Propoziţia 2.3.4 *Fie $f : V_1 \to V_2$ un izomorfism de spaţii vectoriale, având matricea asociată în raport cu două baze fixate $B_1 \subset V_1$ respectiv $B_2 \subset V_2$ $M(f)$.*

Matricea asociată izomorfismului $f^{-1} : V_2 \to V_1$ va fi $M(f^{-1}) = (M(f))^{-1}$.

Demonstraţie: Pe baza Teoremei 2.1.1 (ii), $\dim_{\mathbb{K}} V_1 = \dim_{\mathbb{K}} V_2 \overset{not}{=} n$.

Evident $f \circ f^{-1} = 1_{V_2}$ şi $f^{-1} \circ f = 1_{V_1}$. Conform Propoziţiei 2.3.3, avem

$$M(f) \cdot M(f^{-1}) = M(1_{V_2})\text{şi}M(f^{-1}) \cdot M(f) = M(1_{V_1}) \qquad (*)$$

Fie $B_1 = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ o bază a spaţiului vectorial V_1. Deoarece $1_{V_1}(e_i) = e_i,\ i = \overline{1,n}$, vom avea

$$M(1_{V_1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix} = I_n$$

Analog $M(1_{V_2}) = I_n$.

Înlocuim în (*) şi obţinem

$$M(f) \cdot M(f^{-1}) = M(f^{-1}) \cdot M(f) = I_n$$

de unde deducem că$M(f)$ este nesingulară şi $(M(f))^{-1} = M(f^{-1})$. $\diamondsuit$

Se pune problema următoare: cum se modifică matricea asociată unei aplicaţii liniare $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(V_1, V_2)$ dacă în spaţiile vectoriale V_1 şi V_2 se schimbă bazele?

Teorema 2.3.1 *Fie $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(V_1, V_2)$, $\dim_{\mathbb{K}} V_1 = n$, $\dim_{\mathbb{K}} V_2 = m$. Fie B_1 şi B_1' baze în V_1 şi fie B_2 şi B_2' baze în V_2. Dacă $B_1 \overset{C_1}{\vdash} B_1'$ şi $B_2 \overset{C_2}{\vdash} B_2'$, atunci are loc relaţia:*

$$M'(f) = C_2^{-1} \cdot M(f) \cdot C_1$$

unde $M(f;B_1,B_2) \overset{not}{=} M(f)$ *este matricea asociată aplicaţiei liniare* f *în raport cu bazele* B_1,B_2*, iar* $M'(f;B'_1,B'_2) \overset{not}{=} M'(f)$ *este matricea asociată aplicaţiei liniare* f *în raport cu bazele* B'_1,B'_2*.*

Demonstraţie: Scriem ecuaţiile matriceale ale aplicaţiei liniare f în raport cu bazele B_1,B_2 respectiv B'_1,B'_2 :

$$Y = M(f)\cdot X$$
$$Y' = M'(f)\cdot X'$$

Dacă se efectuează schimbarea de baze $B_1 \overset{C_1}{\vdash} B'_1$, pe baza Propoziţiei 1.4.1 obţinem $X' = C_1^{-1}\cdot X$ şi $X = C_1\cdot X'$.

Analog din $B_2 \overset{C_2}{\vdash} B'_2$ avem $Y' = C_2^{-1}\cdot Y$ şi $Y = C_2\cdot Y'$.

Acum putem scrie

$$Y = M(f)\cdot X = M(f)\cdot(C_1\cdot X')$$
$$Y = C_2\cdot Y' = C_2\cdot(M'(f)\cdot X')$$

de unde deducem $M(f)\cdot C_1\cdot X' = C_2\cdot M'(f)\cdot X'$ sau, echivalent, $(M(f)\cdot C_1 - C_2\cdot M'(f))\cdot X' = 0, \forall\ X' \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Obţinem $M(f)\cdot C_1 = C_2\cdot M'(f)$, deci $M'(f) = C_2^{-1}\cdot M(f)\cdot C_1$ $\diamondsuit$

2.4 Valori proprii, vectori proprii

Fie $(V,+,\cdot,\mathbb{K})$ un spaţiu vectorial şi $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(V)$ un operator liniar.

Definiţia 2.4.1 Un vector $x \in V$, $x \neq 0_V$, pentru care $\exists\ \lambda \in \mathbb{K}$ astfel încât

$$(f - \lambda\cdot 1_V)(x) = 0_V$$

(sau $f(x) = \lambda\cdot x$) se numeşte *vector propriu* al operatorului liniar f, iar λ se numeşte *valoare proprie* a lui f.

Mulţimea tuturor valorilor proprii se numeşte *spectrul* operatorului liniar f şi se notează cu $\sigma(f)$.

Definiţia 2.4.2 Fie $\emptyset \neq U \subseteq V$ un subspaţiu vectorial al lui V. U se numeşte *subspaţiu invariant* faţă de $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(V)$ dacă $\forall\ x \in U$ avem $f(x) \in U$.

Propoziţia 2.4.1 *Mulţimea tuturor vectorilor proprii corespunzători valorii proprii* λ *reunită cu* $\{0_V\}$ *este un subspaţiu vectorial al lui* V*, invariant în raport cu* f*, notat cu* U_λ*.*

Demonstraţie: Fie $x, y \in U_\lambda$ oarecare şi $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Din $x \in U_\lambda$ avem $f(x) = \lambda x$, iar $y \in U_\lambda$ implică $f(y) = \lambda y$. f fiind liniară,

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y) = \alpha\lambda x + \beta\lambda y = \lambda(\alpha x + \beta y)$$

deci $\alpha x + \beta y \in U_\lambda$.

Aplicăm Teorema 1.5.1 şi obţinem că U_λ este subspaţiu vectorial al lui V.

Să arătăm acum că subspaţiul vectorial U_λ este invariant în raport cu f, adică pentru orice $x \in U_\lambda$ avem $f(x) \in U_\lambda$.

Fie $x \in U_\lambda$ arbitrar; $f(x) = \lambda x$. U_λ fiind subspaţiu vectorial, conform Definiţiei 1.5.1 (ii) avem $\lambda x \in U_\lambda, \forall\, x \in U_\lambda, \lambda \in \mathbb{K}$. Deducem că $f(x) \in U_\lambda$. $\diamondsuit$

Definiţia 2.4.3 Subspaţiul vectorial U_λ din Propoziţia 2.4.1 se numeşte *subspaţiul propriu* corespunzător valorii proprii λ.

Teorema 2.4.1 *Fie $f \in \mathcal{L}_\mathbb{K}(V)$. Au loc următoarele afirmaţii:*

(i) Dacă $\lambda_1 \neq \lambda_2$ sunt valori proprii ale lui f, atunci $U_{\lambda_1} + U_{\lambda_2} = U_{\lambda_1} \oplus U_{\lambda_2}$.

(ii) Dacă $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ sunt valori proprii distincte ale operatorului liniar f iar $v_1, v_2, \ldots, v_p$ sunt vectori proprii corespunzători valorilor proprii de mai sus, atunci ei sunt liniar independenţi.

Demonstraţie: (i) $\forall\, x \in U_{\lambda_1} \cap U_{\lambda_2}$ avem $x \in U_{\lambda_1},\ x \in U_{\lambda_2}$, adică $f(x) = \lambda_1 x,\ f(x) = \lambda_2 x$. Egalitatea $\lambda_1 x = \lambda_2 x$ se poate scrie $(\lambda_1 - \lambda_2)x = 0_V$. Aplicăm una din consecinţele definiţiei spaţiului vectorial şi $\lambda_1 \neq \lambda_2$ implică $x = 0_V$, deci $U_{\lambda_1} \cap U_{\lambda_2} = \{0_V\}$.

Atunci suma celor două subspaţii este o sumă directă:

$$U_{\lambda_1} + U_{\lambda_2} = U_{\lambda_1} \oplus U_{\lambda_2}$$

(ii) Demonstrăm afirmaţia (ii) prin inducţie relativ la $p \in \mathbb{N}$.

Dacă $p = 1$, $\{v_1\}$ este sistem liniar independent, v_1 fiind nenul.

Presupunem afirmaţia adevărată pentru $p-1$, adică $\{v_1, \ldots, v_{p-1}\}$ este un sistem liniar independent, şi demonstrăm că ea are loc pentru p.

Prin reducere la absurd, presupunem că $\{v_1, \ldots, v_{p-1}, v_p\}$ este un sistem liniar dependent. Conform Propoziţiei 1.2.1 (ii), $\exists\ \alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1} \in \mathbb{K}$ astfel încât

$$v_p = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_{p-1} v_{p-1} \qquad (*)$$

Vectorul v_p fiind nenul, observăm că $\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}$ nu pot fi toţi nuli.

Din $f \in \mathcal{L}_\mathbb{K}(V)$ şi $(*)$ obţinem

$$f(v_p) = \alpha_1 f(v_1) + \cdots + \alpha_{p-1} f(v_{p-1})$$

Înlocuim $f(v_1) = \lambda_1 v_1, \ldots, f(v_p) = \lambda_p v_p$ şi avem

$$\lambda_p v_p = \alpha_1 \lambda_1 v_1 + \cdots + \alpha_{p-1} \lambda_{p-1} v_{p-1}$$

Pe de altă parte, înmulţind $(*)$ cu $-\lambda_p$ găsim

$$-\lambda_p v_p = -\alpha_1 \lambda_p v_1 - \cdots - \alpha_{p-1} \lambda_p v_{p-1}$$

Adunăm ultimele două egalităţi:

$$0_V = \alpha_1(\lambda_1 - \lambda_p) v_1 + \cdots + \alpha_{p-1}(\lambda_{p-1} - \lambda_p) v_{p-1}$$

Sistemul $\{v_1, \ldots, v_{p-1}\}$ fiind liniar independent, această combinaţie liniară trebuie să fie trivială: $\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_p) = 0, \ldots, \alpha_{p-1}(\lambda_{p-1} - \lambda_p) = 0$.

Rezultă $\alpha_1 = \ldots = \alpha_{p-1} = 0$, deoarece $\lambda_1 \neq \lambda_p \ldots \lambda_{p-1} \neq \lambda_p$. Din $(*)$ avem $v_p = 0_V$; contradicţie.

Observaţia 2.4.1 (i) Dacă $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sunt valori proprii distincte ale operatorului liniar f, atunci există suma directă $U_{\lambda_1} \oplus U_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus U_{\lambda_p}$.

(ii) Un operator liniar pe un spaţiu vectorial n-dimensional are cel mult n valori proprii distincte.

2.5 Polinom caracteristic. Polinoame de matrice şi operatori liniari

Definiţia 2.5.1 Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Matricea nenulă

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$$

se numeşte *vector propriu al matricei* A dacă $\exists\ \lambda \in \mathbb{K}$ astfel încât

$$(A - \lambda \cdot I_n) \cdot X = 0.$$

Ecuaţia matriceală de mai sus, cu $X \neq 0$, conduce la condiţia

$$\det(A - \lambda \cdot I_n) = 0$$

Definiţia 2.5.2 Fie $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Ecuaţia

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

se numeşte *ecuaţia caracteristică a matricei A*.

Polinomul $P_A \in \mathbb{K}_n[\lambda]$ definit prin

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = (-1)^n \lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + \dots + p_{n-1}\lambda + p_n$$

se numeşte *polinom caracteristic al matricei A*.

Observăm că în cazul în care $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ este matricea diagonală

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix} \overset{not}{=} diag(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

polinomul său caracteristic este

$$P_A(\lambda) = (-1)^n (\lambda - a_1)(\lambda - a_2) \dots (\lambda - a_n)$$

Definiţia 2.5.3 Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Spunem că matricele A şi B sunt *asemenea* dacă $\exists\ C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ nesingulară astfel încât $A = C^{-1} \cdot B \cdot C$.

Propoziţia 2.5.1 *Două matrice asemenea au acelaşi polinom caracteristic.*

Demonstraţie: Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ asemenea, adică $\exists\ C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ nesingulară astfel încât $A = C^{-1} \cdot B \cdot C$.

Polinomul caracteristic al matricei A este

$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = \det(C^{-1} \cdot B \cdot C - \lambda I_n) = \det(C^{-1} \cdot B \cdot C - C^{-1} \cdot (\lambda I_n) \cdot C) = \det(C^{-1}(B - \lambda I_n) \cdot C) = \det C^{-1} \cdot \det(B - \lambda I_n) \cdot \det C = \det C^{-1} \cdot \det C \cdot P_B(\lambda) = \det(C^{-1} \cdot C) \cdot P_B(\lambda) = \det(I_n) \cdot P_B(\lambda) = P_B(\lambda)$
adică el coincide cu polinomul caracteristic al matricei B. $\diamondsuit$

Definiţia 2.5.4 Fie $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(V)$. Se numeşte *polinom caracteristic P_f al operatorului liniar f* polinomul caracteristic al matricei $M(f)$ asociată operatorului liniar f într-o bază dată.

Observaţia 2.5.1 Conform Teoremei 2.3.1, dacă B, B' sunt baze ale spaţiului vectorial V şi C este matricea asociată schimbării de baze $B \overset{C}{\vdash} B'$, avem $M'(f) = C^{-1} \cdot M(f) \cdot C$.

Atunci $M(f)$ şi $M'(f)$ sunt matrice asemenea şi, pe baza Propoziţiei 2.5.1, observăm că definiţia de mai sus este independentă de alegerea bazei.

Cu ajutorul polinomului caracteristic al unui operator liniar obţinem o caracterizare a valorilor proprii: acestea sunt tocmai rădăcinile polinomului caracteristic.

Propoziţia 2.5.2 *Fie $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(V)$. $\lambda \in \sigma(f)$ dacă şi numai dacă $P_f(\lambda) = 0$.*

Demonstraţie: $\lambda \in \sigma(f) \Leftrightarrow \exists x \in V \setminus \{0_V\}$ astfel încât $f(x) = \lambda x$ $\Leftrightarrow \exists x \in V \setminus \{0_V\}$ astfel încât $(f - \lambda \cdot 1_V)(x) = 0 \Leftrightarrow \exists x \in V \setminus \{0_V\}$ astfel încât $M(f - \lambda \cdot 1_V) \cdot X = 0$, unde $M(f - \lambda \cdot 1_V)$ este matricea asociată operatorului liniar $f - \lambda \cdot 1_V$ în raport cu o bază fixată B, iar X este matricea coloană asociată vectorului x în raport aceeaşi bază B.

Pe de altă parte, $M(f - \lambda \cdot 1_V) = M(f) - \lambda \cdot M(1_V) = M(f) - \lambda I_n$.

În concluzie, $\lambda \in \sigma(f)$ dacă şi numai dacă$P_{M(f)}(\lambda) = 0$, sau, echivalent, $P_f(\lambda) = 0$. $\diamondsuit$

Definiţia 2.5.5 Fie $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(V)$ şi fie λ o valoare proprie a lui f. Presupunem că polinomul caracteristic al operatorului liniar f se poate scrie sub forma $P_f(X) = (X - \lambda)^{m_\lambda} \cdot Q(x), Q(\lambda) \neq 0$.

Numărul m_λ se numeşte *multiplicitatea algebrică* a valorii proprii λ, iar $r_\lambda = \dim_{\mathbb{K}} U_\lambda$ se numeşte *multiplicitatea geometrică* a lui λ.

Teorema 2.5.1 *Pentru orice valoare proprie λ a operatorului liniar f avem $r_\lambda \leq m_\lambda$.*

Definiţia 2.5.6 Fie $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(V)$ un operator liniar astfel încât matricea asociată într-o bază B este $M(f) = A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ şi fie $Q \in \mathbb{K}_m[X]$,

$$Q(X) = a_0 X^m + a_1 X^{m-1} + \cdots + a_{m-1} X + a_m$$

Operatorul liniar definit prin

$$Q(f) = a_0 \cdot f^m + a_1 \cdot f^{m-1} + \cdots + a_{m-1} \cdot f + a_m \cdot 1_V$$

unde $f^k = f^{k-1} \circ f$, se numeşte *polinomul operatorului liniar f definit de polinomul Q*.

Matricea definită prin

$$Q(A) = a_0 \cdot A^m + a_1 \cdot A^{m-1} + \cdots + a_{m-1} \cdot A + a_m \cdot I_n$$

se numeşte *polinom de matrice* A definit de polinomul Q.

Pe spaţii vectoriale finit dimensionale, studiul polinoamelor de operatori liniari revine la studiul polinoamelor de matrice.

Teorema 2.5.2 (Teorema lui Hamilton-Cayley) *Fie* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *şi* $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$ *polinomul caracteristic al matricei* A*. Atunci avem*

$$P_A(A) = 0_n$$

adică orice matrice îşi verifică propria ecuaţie caracteristică.

Observaţia 2.5.2 (i) O consecinţă a Teoremei 2.5.2 este $P_f(f) = 0$.

(ii) Orice polinom de matrice de grad $\geq n$ poate fi exprimat printr-un polinom de matrice de grad $n-1$:

dacă $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ şi $P_A(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + \cdots + p_{n-1}\lambda + p_n$, conform Teoremei 2.5.2 avem $P_A(A) = 0$, adică

$$(-1)^{n-1} A^n = p_1 A^{n-1} + \cdots + p_{n-1} A + p_n \cdot I_n$$

Înmulţim cu A şi avem: $A^{n+1} = (-1)^{n-1}(p_1 A^{n-1} + \cdots + p_{n-1} A + p_n \cdot I_n) \cdot A = p_1(p_1 A^{n-1} + \cdots + p_{n-1} A + p_n \cdot I_n) + (-1)^{n-1}(p_2 A^{n-1} + \cdots + p_n A)$ $\diamondsuit$

Capitolul 3

Forme biliniare. Forme pătratice. Spaţii vectoriale euclidiene

3.1 Forme biliniare

Definiţia 3.1.1 Fie $(V, +, \cdot, \mathbb{K})$ un spaţiu vectorial. O *formă biliniară* pe V este o aplicaţie $g : V \times V \to \mathbb{K}$ liniară în raport cu fiecare argument. Altfel spus, $\forall\ x, y, x', y' \in V$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, avem:

$$g(\alpha x + \beta y, x') = \alpha g(x, x') + \beta g(y, x')$$

$$g(x, \alpha x' + \beta y') = \alpha g(x, x') + \beta g(x, y')$$

Vom nota cu $\mathcal{L}_2(V, \mathbb{K})$ mulţimea formelor biliniare definite pe spaţiul vectorial V.

Observaţia 3.1.1 Consecinţe imediate ale definiţiei unei forme biliniare sunt următoarele:
(i) $\forall\ x, y \in V$, avem $g(-x, y) = g(x, -y) = -g(x, y)$
(ii) $\forall\ x, y \in V$, avem $g(x, 0_V) = g(0_V, y) = 0$.

Observaţia 3.1.2 Mulţimea $\mathcal{L}_2(V, \mathbb{K})$ are o structură de spaţiu vectorial peste corpul $\mathbb{K}$.

Definiţia 3.1.2 Fie $g \in \mathcal{L}_2(V, \mathbb{K})$. Mulţimile

$$N_1 = N_1(g) = \{x \in V |\ g(x, y) = 0,\ \forall\ y \in V\}$$

$$N_2 = N_2(g) = \{y \in V |\ g(x, y) = 0,\ \forall\ x \in V\}$$

se numesc *spaţiile nule* ale formei biliniare g.

g se numeşte *formă biliniară nesingulară* dacă $N_1 = N_2 = \{0_V\}$. Altfel, g se numeşte *formă biliniară singulară (degenerată).*

Observaţia 3.1.3 Spaţiile nule N_1 şi N_2 sunt subspaţii vectoriale ale spaţiului vectorial V.

Justificăm această afirmaţie folosind Teorema 1.5.1:
$\forall\ x, y \in N_1, x' \in V, \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, avem:

$$g(\alpha x + \beta y, x') = \alpha g(x, x') + \beta g(y, x') = 0$$

deci $\alpha x + \beta y \in N_1$.

În acelaşi mod, $\forall\ x', y' \in N_2, x \in V, \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, avem:

$$g(x, \alpha x' + \beta y') = \alpha g(x, x') + \beta g(x, y') == 0$$

deci $\alpha x' + \beta y' \in N_2$. $\diamondsuit$

Definiţia 3.1.3 O formă biliniară $g \in \mathcal{L}_2(V, \mathbb{K})$ se numeşte *simetrică* dacă

$$g(x, y) = g(y, x), \forall x, y \in V$$

g se numeşte formă biliniară *antisimetrică* dacă

$$g(x, y) = -g(y, x), \forall x, y \in V$$

Vom nota cu $\mathcal{L}_2^s(V, \mathbb{K})$ respectiv $\mathcal{L}_2^a(V, \mathbb{K})$ mulţimea formelor biliniare simetrice, respectiv antisimetrice, definite pe spaţiul vectorial V.

Teorema 3.1.1 *$\mathcal{L}_2^s(V, \mathbb{K})$ şi $\mathcal{L}_2^a(V, \mathbb{K})$ sunt subspaţii vectoriale ale spaţiului vectorial $\mathcal{L}_2(V, \mathbb{K})$ şi are loc relaţia:*

$$\mathcal{L}_2(V, \mathbb{K}) = \mathcal{L}_2^s(V, \mathbb{K}) \oplus \mathcal{L}_2^a(V, \mathbb{K})$$

Demonstraţie: Aplicăm din nou Teorema 1.5.1. $\forall g_1, g_2 \in \mathcal{L}_2^s(V, \mathbb{K})$, $\forall k_1, k_2 \in \mathbb{K}$, avem:

$(k_1 g_1 + k_2 g_2)(x, y) = k_1 g_1(x, y) + k_2 g_2(x, y) = k_1 g_1(y, x) + k_2 g_2(y, x) =$
$= (k_1 g_1 + k_2 g_2)(y, x), \forall x, y \in V$

Atunci $k_1 g_1 + k_2 g_2 \in \mathcal{L}_2^s(V, \mathbb{K})$, deci $\mathcal{L}_2^s(V, \mathbb{K})$ este subspaţiu vectorial al spaţiului vectorial $\mathcal{L}_2(V, \mathbb{K})$. Analog se verifică faptul că $\mathcal{L}_2^a(V, \mathbb{K})$ este subspaţiu vectorial al spaţiului vectorial $\mathcal{L}_2(V, \mathbb{K})$.

Conform Propoziţiei 1.6.1, $\mathcal{L}_2^s(V,\mathbb{K}) + \mathcal{L}_2^a(V,\mathbb{K})$ este subspaţiu vectorial al spaţiului vectorial $\mathcal{L}_2(V,\mathbb{K})$.

Arătăm că suma celor două subspaţii vectoriale este o sumă directă. Pentru $g \in \mathcal{L}_2^s(V,\mathbb{K}) \cap \mathcal{L}_2^a(V,\mathbb{K})$ avem

$g(x,y) = g(y,x)$ şi $g(x,y) = -g(y,x), \forall x,y \in V$.

Adunăm cele două egalităţi şi avem $2g(x,y) = 0,\ \forall\ x,y \in V$, adică

$$\mathcal{L}_2^s(V,\mathbb{K}) \cap \mathcal{L}_2^a(V,\mathbb{K}) = \{0\}$$

Obţinem $\mathcal{L}_2^s(V,\mathbb{K}) + \mathcal{L}_2^a(V,\mathbb{K}) = \mathcal{L}_2^s(V,\mathbb{K}) \oplus \mathcal{L}_2^a(V,\mathbb{K}) \subseteq \mathcal{L}_2(V,\mathbb{K})$. Trebuie doar să verificăm incluziunea $\mathcal{L}_2(V,\mathbb{K}) \subseteq \mathcal{L}_2^s(V,\mathbb{K}) + \mathcal{L}_2^a(V,\mathbb{K})$, adică $\forall\ g \in \mathcal{L}_2(V,\mathbb{K})$, $\exists\ g^s \in \mathcal{L}_2^s(V,\mathbb{K})$ şi $\exists\ g^a \in \mathcal{L}_2^a(V,\mathbb{K})$ astfel încât $g = g^s + g^a$. g^s fiind o formă biliniară simetrică, avem $g^s(x,y) = g^s(y,x),\ \forall\ x,y \in V$. g^a este o formă biliniară antisimetrică, adică $g^a(x,y) = -g^a(y,x),\ \forall\ x,y \in V$. Obţinem

$$g(x,y) = g^s(x,y) + g^a(x,y),\ \forall\ x,y \in V$$

Pe de altă parte,

$$g(y,x) = g^s(y,x) + g^a(y,x) = g^s(x,y) - g^a(x,y)$$

Adunăm cele două egalităţi de mai sus:

$$g(x,y) + g(y,x) = 2g^s(x,y)$$

Definim

$$g^s : V \times V \longrightarrow \mathbb{K}, g^s(x,y) = \frac{1}{2}(g(x,y) + g(y,x))$$

$$g^a : V \times V \longrightarrow \mathbb{K}, g^a(x,y) = \frac{1}{2}(g(x,y) - g(y,x)),\ \forall\ x,y \in V$$

Formele biliniare g^s şi g^a au proprietăţile cerute. $\diamondsuit$

Observaţia 3.1.4 (i) În general $N_1(g) \neq N_2(g)$; egalitatea are loc numai dacă $g \in \mathcal{L}_2^s(V,\mathbb{K})$.

(ii) $g \in \mathcal{L}_2^a(V,\mathbb{K})$ dacă şi numai dacă $g(x,x) = 0, \forall x \in V$. Să justificăm această afirmaţie.

Fie $g : V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$ astfel încât $g(x,y) = -g(y,x),\ \forall\ x,y \in V$; atunci $g(x,x) = -g(x,x) \ \Leftrightarrow\ g(x,x) = 0,\ \forall\ x \in V$.

Reciproc, să presupunem că $g(x,x) = 0, \forall x \in V$. Pentru orice $x,y \in V$, avem $x + y \in V$. Conform ipotezei $g(x+y, x+y) = 0$. Folosind faptul că g este o formă biliniară, obţinem $g(x,x) + g(x,y) + g(y,x) + g(y,y) = 0$. Înlocuim $g(x,x) = g(y,y) = 0$ şi rezultă $g(x,y) + g(y,x) = 0$, adică $g(x,y) = -g(y,x), \forall x,y \in V$. Am arătat astfel că $g \in \mathcal{L}_2^a(V,\mathbb{K})$.

3.2 Matricea asociată unei forme biliniare

Fie $(V,+,\cdot,\mathbb{K})$ un spaţiu vectorial de dimensiune n şi fie $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ o bază a spaţiului vectorial V.

Fie x, y oarecare. În raport cu baza B, avem următoarele reprezentări ale vectorilor x şi y :

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n$$

$$y = y_1 e_1 + y_2 e_2 + \cdots + y_n e_n$$

Pentru $g \in \mathcal{L}_2(V,\mathbb{K})$ putem scrie

$$g(x,y) = g\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j g(e_i, e_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} g_{ij} x_i y_j$$

Am notat $g(e_i, e_j) = g_{ij}, j = \overline{1,n}$.

Definiţia 3.2.1 Scalarii $g_{ij} = g(e_i, e_j)$, $i, j = \overline{1,n}$, se numesc *coordonatele* formei biliniare g în raport cu baza B. Expresia

$$g(x,y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} g_{ij} x_i y_j$$

se numeşte *expresia algebrică* a formei biliniare g în raport cu baza B.

Matricea $G_B = (g_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ se numeşte *matricea asociată formei biliniare* g în raport cu baza B. Aceasta se notează simplu cu G atunci când baza B este subînţeleasă din context.

Folosind notaţiile

$$X^t = (x_1\ x_2 \ldots x_n) \text{ şi } Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

forma biliniară g se poate scrie sub forma matriceală

$$g(x,y) = X^t \cdot G \cdot Y$$

Observaţia 3.2.1 (i) Matricea asociată formei biliniare $g_1 + g_2$, unde $g_1, g_2 \in \mathcal{L}_2(V,\mathbb{K})$, este $G_1 + G_2$, iar matricea asociată formei biliniare $k \cdot g$, unde $g \in \mathcal{L}_2(V,\mathbb{K})$, este $k \cdot G$.

(ii) Dacă $g \in \mathcal{L}_2^s(V,\mathbb{K})$, atunci G este o matrice simetrică.

(iii) Dacă $g \in \mathcal{L}_2^a(V,\mathbb{K})$, atunci G este o matrice antisimetrică.

Se pune problema următoare: cum se comportă matricea formei biliniare g la o schimbare de baze în spaţiul vectorial V?

Teorema 3.2.1 *Fie $g \in \mathcal{L}_2(V, \mathbb{K})$, B şi B' două baze în spaţiul vectorial V astfel încât $B \overset{C}{\vdash} B'$. Dacă G este matricea asociată formei biliniare g în raport cu baza B, iar G' este matricea asociată formei biliniare g în raport cu baza B', atunci*

$$G' = C^t \cdot G \cdot C.$$

Demonstraţie: Ecuaţia matriceală a formei biliniare g în raport cu baza B este

$$g(x, y) = X^t \cdot G \cdot Y \tag{$*$}$$

iar în raport cu baza B' avem

$$g(x, y) = X'^t \cdot G' \cdot Y' \tag{$**$}$$

Fie schimbarea de baze $B \overset{C}{\vdash} B'$. Din Propoziţia 1.4.1 avem

$X' = C^{-1} \cdot X$ şi $X = C \cdot X'$

$Y' = C^{-1} \cdot Y$ şi $Y = C \cdot Y'$

Înlocuim în (*) şi avem:

$$g(x, y) = X^t \cdot G \cdot Y = X'^t \cdot C^t \cdot G \cdot C \cdot Y' = X'^t \cdot G' \cdot Y'$$

Din această egalitate şi din (**) obţinem $X'^t(C^t \cdot G \cdot C - G') \cdot Y' = 0,\ \forall\, X', Y'$, de unde rezultă $C^t \cdot G \cdot C = G'$. $\diamondsuit$

Observaţia 3.2.2 Rangul matricei G este acelaşi pentru orice bază a spaţiului vectorial V.

Definiţia 3.2.2 Se numeşte *rang* al formei biliniare $g \in \mathcal{L}_2(V, \mathbb{K})$ rangul matricei asociate lui g într-o bază oarecare a spaţiului vectorial V.

3.3 Forme pătratice

Dintre formele biliniare definite pe un spaţiu vectorial, o importanţă aparte o au formele biliniare simetrice.

Propoziţia 3.3.1 *Orice formă biliniară simetrică $g : V \times V \to \mathbb{K}$ este determinată de restricţia sa la diagonala lui $V \times V$:*

$$h : V \to \mathbb{K}, h(x) = g(x, x),\ \forall\, x \in V.$$

Demonstraţie: Fie $x, y \in V$ oarecare. Calculăm

$$g(x+y, x+y) = g(x,x) + 2g(x,y) + g(y,y)$$

Din definiţia lui h avem

$$h(x+y) = h(x) + 2g(x,y) + h(y)$$

de unde obţinem

$$g(x,y) = \frac{1}{2}(h(x+y) - h(x) - h(y)), \ \forall\, x,y \in V.$$

Definiţia 3.3.1 Fie g o formă biliniară simetrică. Funcţia h definită prin

$$h : V \to \mathbb{K}, h(x) = g(x,x), \ \forall\, x \in V$$

se numeşte *formă pătratică* pe spaţiul vectorial V.

Forma biliniară

$$g : V \times V \to \mathbb{K}, g(x,y) = \frac{1}{2}(h(x+y) - h(x) - h(y)), \ \forall\, x,y \in V$$

se numeşte *forma polară (forma dedublată)* a formei pătratice h.

Forma pătratică h se numeşte *nesingulară* (respectiv *singulară*) dacă g este nesingulară (respectiv singulară).

Observaţia 3.3.1 Pe baza definiţiei se stabilesc uşor următoarele proprietăţi ale unei forme pătratice h :

(i) $h(\lambda x) = \lambda^2 h(x), \ \forall\, x \in V, \ \lambda \in \mathbb{K}$ (h este funcţie omogenă)

(ii) $h(-x) = h(x), \ \forall\, x \in V$ (h este funcţie pară)

(iii) $h(x+y) + h(x-y) = 2(h(x) + h(y)), \ \forall\, x,y \in V$ (identitatea paralelogramului).

Fie V un spaţiu vectorial peste corpul comutativ $\mathbb{K}$, $\dim_{\mathbb{K}} V = n$, iar $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ o bază a spaţiului vectorial V.

Pentru orice $x \in V$, conform Teoremei 1.3.5, $\exists x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$ unici astfel încât $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n$.

Din Definiţia 3.2.1 şi Observaţia 3.2.1 obţinem:

$$h(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} g_{ij} x_i x_j, \ g_{ij} = g_{ji} \in \mathbb{K}, \ i = \overline{1,n}, \ j = \overline{1,n}, \ g_{ij} = g(e_i, e_j)$$

Definiţia 3.3.2 Expresia $h(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} g_{ij}x_ix_j$ se numeşte *forma (expresia) algebrică* a formei pătratice h în raport cu baza B. Coeficienţii g_{ij}, $i,j = \overline{1,n}$, se numesc *coordonatele* formei pătratice h în raport cu baza B.

Matricea (simetrică) $G = (g_{ij})_{1\le i,j\le n}$ se numeşte *matricea asociată* formei pătratice h în raport cu baza B.

Folosind notaţiile uzuale

$$X^t = (x_1\ x_2 \dots x_n), X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

forma pătratică h va avea *ecuaţia matriceală*

$$h(x) = X^t \cdot G \cdot X$$

Exemplu: Fie forma pătratică $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $h(x) = 2x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + x_1x_3 - 4x_2x_3$. Matricea asociată lui h (în raport cu baza canonică B_c) este

$$G = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & -2 \\ \frac{1}{2} & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

iar ecuaţia matriceală a formei pătratice h este următoarea:

$$h(x) = (x_1\ x_2\ x_3) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & -2 \\ \frac{1}{2} & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Observaţia 3.3.2 În expresia algebrică a unei forme pătratice h intervin două tipuri de termeni:

- termeni de forma $g_{11}x_1^2, \dots, g_{nn}x_n^2$, numiţi *termeni pătratici*;

- termeni de forma $g_{12}x_1x_2, \dots, g_{n-1,n}x_{n-1}x_n$, numiţi *termeni dreptunghiulari.*

Termenii corespunzători formei polare g se obţin prin dedublare: $g_{11}x_1^2$ se înlocuieşte cu $g_{11}x_1y_1$, iar $g_{12}x_1x_2$ se înlocuieşte cu $\frac{g_{12}}{2}(x_1y_2 + x_2y_1)$.

3.4 Reducerea unei forme pătratice la forma canonică

Se pune problema existenţei unei baze în spaţiul vectorial V astfel încât în raport cu această bază h să aibă o expresie de forma

$$h(x) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2$$

adică să conţină numai termeni pătratici.

Definiţia 3.4.1 Expresia de mai sus se numeşte *forma canonică* a formei pătratice h.

Expresia matriceală a formei canonice a lui h este

$$h(x) = (x_1\ x_2 \dots x_n) \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Observaţia 3.4.1 Dacă $rangG = r < n$, în forma canonică a lui h numai r dintre coeficienţii $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sunt nenuli; pentru că rangul lui G nu depinde de bază (Observaţia 3.2.2), putem scrie $rangG = rang[diag(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)]$.

Teorema 3.4.1 (Gauss-Lagrange) *Fiind dată o formă pătratică $h : V \to \mathbb{K}$ într-o bază oarecare, se poate face o schimbare de baze astfel încât în raport cu noua bază h să aibă forma canonică.*

Demonstraţie: Fie $dim_{\mathbb{K}} V = n$. Deosebim două cazuri.
I. $\exists\ a_{ii} \neq 0$; putem presupune că $a_{11} \neq 0$.
Scriem h sub forma următoare:
$$h(x) = a_{11}\left(x_1^2 + \frac{2a_{12}}{a_{11}}x_1x_2 + \cdots + \frac{2a_{1n}}{a_{11}}x_1x_n\right) + \varphi(x_2, \dots, x_n)$$
$$h(x) = a_{11}\left(x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \cdots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n\right)^2 + h_1(x_2, \dots, x_n)$$
$$h_1(x_2, \dots, x_n) = \varphi(x_2, \dots, x_n) - a_{11}\left[\left(\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2\right)^2 - \cdots - \left(\frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n\right)^2\right];$$
h_1 este o formă pătratică în $x_2, \dots, x_n$.

Efectuăm schimbarea de coordonate

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + \dfrac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \cdots + \dfrac{a_{1n}}{a_{11}}x_n \\ y_2 = x_2 \\ \vdots \\ y_n = x_n \end{cases}$$

Se continuă în acelaşi mod cu forma pătratică h_1.

II. $a_{ii} = 0,\ i = \overline{1,n};\ \exists\ a_{ij} \neq 0,\ i \neq j$; presupunem $a_{12} \neq 0$.

Prin efectuarea schimbării de coordonate

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 \\ y_2 = x_1 - x_2 \\ y_3 = x_3 \\ \vdots \\ y_n = x_n \end{cases}$$

reducem acest caz la cazul I.$\diamondsuit$

Exemplu: Fie forma pătratică

$$h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, h(x) = x_1x_2 + x_2x_3 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$$

Grupăm termenii ce conţin x_1 şi formăm un pătrat perfect:

$h(x) = -(x_1^2 - x_1x_2) + x_2x_3 - x_2^2 - x_3^2$

$h(x) = -\left(x_1 - \dfrac{1}{2}x_2\right)^2 - \dfrac{3}{4}x_2^2 + x_2x_3 - x_3^2$

Aplicăm aceeaşi metodă pentru forma pătratică $h_1(x) = -\dfrac{3}{4}x_2^2 + x_2x_3 - x_3^2$:

$h(x) = -\left(x_1 - \dfrac{1}{2}x_2\right)^2 - \dfrac{3}{4}\left(x_2^2 - \dfrac{4}{3}x_2x_3\right) - x_3^2$

În final obţinem

$h(x) = -\left(x_1 - \dfrac{1}{2}x_2\right)^2 - \dfrac{3}{4}\left(x_2 - \dfrac{2}{3}x_3\right)^2 - \dfrac{2}{3}x_3^2$

Efectuăm schimbarea de coordonate

$$\begin{cases} x_1' = x_1 - \dfrac{1}{2}x_2 \\ x_2' = x_2 - \dfrac{2}{3}x_3 \\ x_3' = x_3 \end{cases}$$

care se poate scrie sub forma

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Conform Propoziţiei 1.4.1, $X' = C^{-1} \cdot X$, C fiind matricea asociată schimbării de baze $B \overset{C}{\vdash} B'$, de unde obţinem

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

În raport cu noile coordonate avem

$$h(x) = -(x'_1)^2 - \frac{3}{4}(x'_2)^2 - \frac{2}{3}(x'_3)^2$$

care este chiar forma canonică a formei pătratice h.

Să aflăm acum baza B'. Matricea asociată schimbării de baze $B \overset{C}{\vdash} B'$ este

$$C = (C^{-1})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Putem scrie acum formulele de schimbare a bazelor $B \vdash B'$:

$$\begin{cases} e'_1 = e_1 \\ e'_2 = \frac{1}{2}e_1 + e_2 \\ e'_3 = \frac{1}{3}e_1 + \frac{2}{3}e_2 + e_3 \end{cases}$$

şi în acest fel găsim $B' = \{e'_1 = (1, 0, 0), e'_2 = (\frac{1}{2}, 1, 0), e'_3 = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1)\}$. $\diamondsuit$

Observaţia 3.4.2 (i) Forma canonică nu este unică.

(ii) Forma polară asociată formei pătratice

$$h(x) = \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2$$

este $g(x, y) = \lambda_1 x_1 y_1 + \lambda_2 x_2 y_2 + \cdots + \lambda_n x_n y_n$ şi ea se numeşte forma canonică a formei biliniare polare g.

Definiţia 3.4.2 Fie $A = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,n}\\ j=\overline{1,n}}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Determinanţii

$\Delta_1 = a_{11}$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$

$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

$\vdots$

$\Delta_n = detA$

se numesc *minorii diagonali principali* ai matricei A.

Teorema 3.4.2 (Jacobi) *Dacă matricea asociată unei forme pătratice h are toţi minorii diagonali principali nenuli, atunci există o bază astfel încât h să aibă, în această bază, forma canonică*

$$h(x') = \frac{1}{\Delta_1}(x'_1)^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2}(x'_2)^2 + \cdots + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}(x'_n)^2$$

Fără demonstraţie.

Exemplu: Fie forma pătratică $h : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, h(x) = 2x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 + 8x_1x_2 - 2x_1x_3$. Matricea asociată acesteia este $\begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 4 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ iar minorii diagonali principali sunt $\Delta_1 = 2, \Delta_2 = -20, \Delta_3 = -18$. Găsim astfel forma canonică a lui h :

$$h(x') = \frac{1}{2}(x'_1)^2 - \frac{1}{10}(x'_2)^2 + \frac{10}{9}(x'_3)^2$$

Observaţia 3.4.3 (i) Dacă V este un spaţiu vectorial complex şi rang $h = r \leq n = dim_{\mathbb{C}}V$, în forma canonică a lui h, $h(x) = \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_r x_r^2$, se poate efectua o schimbare de coordonate de forma

$$\begin{cases} z_1 = \sqrt{\lambda_1}x_1 \\ \vdots \\ z_r = \sqrt{\lambda_r}x_r \\ z_{r+1} = x_{r+1} \\ \vdots \\ z_n = x_n \end{cases}$$

şi expresia lui h devine

$$h(z) = z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_r^2$$

Aceasta este *forma normală a formei pătratice h într-un spaţiu vectorial complex.*

(ii) Dacă V este un spaţiu vectorial real, presupunem $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p > 0$ şi $\lambda_{p+1}, \lambda_{p+2}, \ldots, \lambda_r < 0$ (altfel renumerotăm coordonatele).

Efectuăm o schimbare de coordonate de forma

$$\begin{cases} y_1 = \sqrt{\lambda_1} x_1 \\ \vdots \\ y_p = \sqrt{\lambda_p} x_p \\ y_{p+1} = \sqrt{|\lambda_{p+1}|} x_{p+1} \\ \vdots \\ y_r = \sqrt{|\lambda_r|} x_r \\ y_{r+1} = x_{r+1} \\ y_n = x_n \end{cases}$$

şi expresia lui h devine

$$h(y) = y_1^2 + \cdots y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots - y_r^2$$

Aceasta este *forma normală a formei pătratice h într-un spaţiu vectorial real.*

O problemă interesantă este următoarea: numărul p al termenilor pozitivi din forma normală (canonică) a unei forme pătratice h definită pe un spaţiu vectorial real depinde de bază? Răspunsul este dat de teorema următoare:

Teorema 3.4.3 (Sylvester) *Numărul p al termenilor pozitivi din expresia canonică a unei forme pătratice definită pe un spaţiu vectorial real este independent de alegerea bazei.*

Definiţia 3.4.3 Numărul p al termenilor pozitivi din expresia canonică a formei pătratice h se numeşte *indice pozitiv de inerţie*. Numărul $q = r - p$ se numeşte *indice negativ de inerţie*, iar $\text{sign}(h) = p - q$ se numeşte *signatura* formei pătratice h.

O formă pătratică h se numeşte *pozitiv definită* dacă $h(x) > 0$, $\forall x \in V$, $x \neq 0_V$. h se numeşte *negativ definită* dacă $h(x) < 0$, $\forall x \in V$, $x \neq 0_V$.

Observaţia 3.4.4 (i) h este pozitiv definită dacă şi numai dacă $p = n$ sau, echivalent, $\Delta_1, \ldots, \Delta_n > 0$

(ii) h este negativ definită dacă şi numai dacă $q = n$ sau, echivalent, $(-1)^k \Delta_k > 0, k = \overline{1, n}$.

3.5 Definiţia spaţiului vectorial euclidian. Exemple

Un spaţiu vectorial euclidian este un spaţiu vectorial dotat cu o formă biliniară (conjugat) simetrică, pozitiv definită, numită produs scalar, care permite definirea a două concepte fundamentale noi: *norma* unui vector respectiv *ortogonalitatea* a doi vectori.

Definiţia 3.5.1 Fie $(V,+,\cdot,\mathbb{R})$ un spaţiu vectorial. Se numeşte *produs scalar real* pe V aplicaţia $\langle\cdot,\cdot\rangle : V\times V\to\mathbb{R}, (x,y)\mapsto\langle x,y\rangle$ cu proprietăţile:
1) $\langle x,y\rangle=\langle y,x\rangle,\ \forall\ x,y\in V$
2) $\langle kx,y\rangle=k\langle x,y\rangle,\ \forall\ x,y\in V,\ k\in\mathbb{R}$
3) $\langle x+y,z\rangle=\langle x,z\rangle+\langle y,z\rangle,\ \forall\ x,y,z\in V$
4) $\langle x,x\rangle\geq 0,\ \forall\ x\in V;\ \langle x,x\rangle=0\ \Leftrightarrow\ x=0_V.$

Definiţia 3.5.2 Fie $(V,+,\cdot,\mathbb{C})$ un spaţiu vectorial. Se numeşte *produs scalar complex* pe V aplicaţia

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : V\times V\to\mathbb{C}, (x,y)\mapsto\langle x,y\rangle$$

cu următoarele proprietăţi:
1') $\langle x,y\rangle=\overline{\langle y,x\rangle},\ \forall\ x,y\in V$
2), 3) şi 4) ca în Definiţia 3.5.1.

Observaţia 3.5.1 Pe baza definiţiilor de mai sus, se stabilesc uşor următoarele proprietăţi:
(i) $\langle x,ky\rangle=k\langle x,y\rangle,\ \forall\ x,y\in V,\ k\in\mathbb{R}$
$\langle x,ky\rangle=\overline{k}\langle x,y\rangle,\ \forall\ x,y\in V,\ k\in\mathbb{C}$
(ii) $\langle x,0_V\rangle=0,\ \forall\ x\in V,\ \mathbb{K}$ fiind $\mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$
(iii) $\langle x,y+z\rangle=\langle x,y\rangle+\langle x,z\rangle,\ \forall\ x,y,z\in V,\ \mathbb{K}$ fiind $\mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$

În concluzie, un produs scalar real pe V este o formă biliniară simetrică pozitiv definită.

Definiţia 3.5.3 Un spaţiu vectorial V pe care s-a definit un produs scalar (real sau complex) se numeşte *spaţiu prehilbertian* (real sau complex). Dacă, în plus, $\dim V<+\infty$, spaţiul prehilbertian V se numeşte *spaţiu vectorial euclidian.*

Exemple: (i) Pe spaţiul vectorial aritmetic n-dimensional $\mathbb{R}^n$ definim

$$\langle x,y\rangle=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n$$

unde $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$.

Se verifică uşor proprietăţile 1)-4) din Definiţia 3.5.1, deci în felul acesta se defineşte un produs scalar, numit produsul scalar canonic în $\mathbb{R}^n$.

(ii) Fie $V = \mathbb{C}^n$ şi $\langle x, y\rangle = x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} + \dots x_n\overline{y}_n$. Au loc proprietăţile 1')-4) din Definiţia 3.5.2. Produsul scalar obţinut se numeşte produsul scalar canonic în $\mathbb{C}^n$.

Definiţia 3.5.4 Fie $(V, +, \cdot, \mathbb{K})$ un spaţiu vectorial, $\mathbb{K}$ fiind $\mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$. Aplicaţia $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}_+$ cu următoarele proprietăţi:

1) $\|x\| \geq 0,\ \forall\, x \in V;\ \|x\| = 0 \ \Leftrightarrow\ x = 0_V$;

2) $\|kx\| = |k| \cdot \|x\|,\ \forall\, x \in V,\ k \in \mathbb{K}$;

3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|,\ \forall\, x, y \in V$

se numeşte *normă* pe spaţiu vectorial V, iar $(V, \|\cdot\|)$ se numeşte *spaţiu vectorial normat.*

Teorema 3.5.1 *Fie V un spaţiu prehilbertian real. Au loc afirmaţiile următoare:*

(i) $|\langle x, y\rangle| = \sqrt{\langle x, x\rangle} \cdot \sqrt{\langle y, y\rangle},\ \forall\, x, y \in V$ (inegalitatea lui Schwartz)

(ii) $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}_+,\ \|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle},\ \forall\, x \in V$, *defineşte o normă pe V*

(Orice spaţiu prehilbertian real este un spaţiu vectorial normat.)

(iii) $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2),\ \forall\, x, y \in V$ (identitatea paralelogramului)

Definiţia 3.5.5 (i) Funcţia $d : V \times V \to \mathbb{R}_+$, $d(x, y) = \|x - y\|,\ \forall\, x, y \in V$ se numeşte *distanţă* pe V; $d(x, y)$ se numeşte distanţa dintre vectorii x şi y.

(ii) Fie $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Numărul $\theta \in [0, \pi]$ definit prin $\cos\theta = \dfrac{\langle x, y\rangle}{\|x\| \cdot \|y\|}$, $x, y \neq 0_V$ se numeşte *unghiul* vectorilor x şi y.

Remarcăm faptul că definiţia unghiului dintre doi vectori are sens numai pentru spaţii vectoriale reale. Definiţia este corectă, conform inegalităţii lui Schwartz.

3.6 Ortogonalizare

Fie V un spaţiu prehilbertian real sau complex.

Definiţia 3.6.1 (i) Vectorii $x, y \in V$ se numesc *ortogonali* dacă $\langle x, y\rangle = 0$. În acest caz, notăm $x \perp y$.

(ii) Sistemul de vectori $\{v_i\}_{i \in I} \subset V$ se numeşte *sistem ortogonal* dacă $v_i \perp v_j,\ \forall\, i, j \in I,\ i \neq j$.

(iii) Fie U, W subspaţii vectoriale ale lui V. Spunem că U şi W sunt *subspaţii ortogonale* dacă $x \perp y, \ \forall\, x \in U, \ y \in W$.

(iv) Un sistem de vectori $\{v_i\}_{i\in I} \subset V$ se numeşte *sistem ortonormat* dacă este un sistem ortogonal şi $\|v_i\| = 1, \ \forall\, i \in I$ (v_i - versori).

Dacă $\{v_i\}_{i\in I} \subset V$ este un sistem ortonormat, putem scrie

$$\langle v_i, v_j\rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad \text{(simbolul lui Kronecker)}$$

Observăm că vectorul nul este ortogonal oricărui vector: $\langle 0_V, x\rangle = 0, \ \forall\, x \in V$.

Propoziţia 3.6.1 *(i) Fie V un spaţiu prehilbertian. Orice sistem ortogonal de vectori nenuli din V este liniar independent.*

(ii) Fie V un spaţiu vectorial euclidian n-dimensional. Orice sistem ortogonal format din n vectori nenuli ai lui V este bază.

(iii) Fie V un spaţiu vectorial euclidian real sau complex şi $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ o bază ortonormată a lui V. Atunci avem:

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y}_i, \ \textit{dacă}\ \mathbb{K} = \mathbb{C}$$

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \ \textit{dacă}\ \mathbb{K} = \mathbb{R}.$$

Demonstraţie: (i) Fie $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset V \backslash \{0_V\}$, având proprietatea $v_i \perp v_j, i \neq j$. Fie $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ astfel încât $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n = 0_V$. Atunci

$$\langle \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n, v_i\rangle = 0, \ i = \overline{1, n}.$$

Din proprietăţile produsului scalar obţinem

$$\alpha_1\langle v_1, v_i\rangle + \alpha_2\langle v_2, v_i\rangle + \cdots + \alpha_i\langle v_i, v_i\rangle + \cdots + \alpha_n\langle v_n, v_i\rangle = 0$$

Pe de altă parte, $\langle v_i, v_j\rangle = 0, \ i \neq j$. Rezultă $\alpha_i \|v_i\|^2 = 0$, deci $\alpha_i = 0, \ i = \overline{1, n}$. Atunci S este un sistem liniar independent.

(ii) Fie $S = \{v_1, \ldots, v_n\} \subset V \setminus \{0_V\}$ un sistem ortogonal de vectori. Pe baza afirmaţiei (i), S este un sistem liniar independent, ce are n elemente. Deoarece $dim_{\mathbb{K}} V = n$, rezultă că S este bază a spaţiului vectorial V.

(iii) Fie $x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$ şi $y = y_1 e_1 + \cdots + y_n e_n$. Considerăm $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Din proprietăţile produsului scalar avem:

$\langle x,y\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n x_i \left\langle e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i \overline{y}_j \langle e_i, e_j\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i \overline{y}_j \delta_{ij} = \sum_{i=1}^n x_i \overline{y}_i$

În acelaşi mod, în cazul $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ putem scrie:

$\langle x,y\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j \langle e_i, e_j\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j \delta_{ij} = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ $\diamondsuit$

Propoziţia 3.6.1 arată că în raport cu o bază ortonormată orice produs scalar are forma canonică.

Teorema 3.6.1 (Procedeul de ortogonalizare Gram-Schmidt) *Fie V un spaţiu prehilbertian real sau complex şi fie $S = \{f_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset V$ un sistem liniar independent. Fie $W_k = \langle f_1, f_2, \ldots, f_k\rangle$, $k \geq 1$.*

Există un sistem ortogonal de vectori $S' = \{e_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset V$ astfel încât

$$W'_k = \langle e_1, e_2, \ldots, e_k\rangle = W_k, k \geq 1.$$

Demonstraţie: Arătăm aceasta prin inducţie relativ la $k \in \mathbb{N}$.

Fie $k = 1$; luăm $e_1 = f_1$. Deoarece S este un sistem liniar independent, $f_i \neq 0_V$, $\forall\, i \in \mathbb{N}$, deci $e_1 \neq 0_V$. Evident $W_1 = \langle e_1\rangle = \langle f_1\rangle = W_1$.

Pentru $k = 2$ luăm $e_2 = f_2 + \lambda e_1$, unde $\lambda \in \mathbb{K}$ astfel încât $\langle e_2, e_1\rangle = 0$. Din $\langle f_2 + \lambda e_1, e_1\rangle = 0$ rezultă $\langle f_2, e_1\rangle + \lambda\langle e_1, e_1\rangle = 0$ şi găsim $\lambda = -\dfrac{\langle f_2, e_1\rangle}{\langle e_1, e_1\rangle}$.

Am obţinut astfel

$$e_1 = f_1;\ e_2 = f_2 - \frac{\langle f_2, e_1\rangle}{\langle e_1, e_1\rangle} e_1$$

Fie $W_2 = \langle f_1, f_2\rangle$. Avem $e_1, e_2 \in W_2$ şi $W'_2 = \langle e_1, e_2\rangle \subseteq W_2$. Reciproc, din

$$f_1 = e_1;\ f_2 = e_2 + \frac{\langle f_2, e_1\rangle}{\langle e_1, e_1\rangle} e_1$$

rezultă $f_1, f_2 \in W'_2 = \langle e_1, e_2\rangle \;\Rightarrow$ şi $W_2 = \langle f_1, f_2\rangle \subseteq W'_2$. În concluzie, $W'_2 = W_2$.

Presupunem că am găsit un sistem ortogonal de vectori din V, $\{e_1, \ldots, e_k\}$, astfel încât $W'_i = W_i$, $i = \overline{1,k}$.

Luăm $e_{k+1} = f_{k+1} + \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_i$ cu $\lambda_i \in \mathbb{K}$ astfel încât $\langle e_{k+1}, e_j\rangle = 0$, $j = \overline{1,k}$.

Din $\langle f_{k+1} + \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i, e_j\rangle = 0, \quad j = \overline{1,k}$ rezultă

$$\langle f_{k+1}, e_j\rangle + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \langle e_i, e_j\rangle = 0, \quad j = \overline{1,k}.$$

Folosind $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$ găsim $\lambda_j = -\dfrac{\langle f_{k+1}, e_j\rangle}{\langle e_j, e_j\rangle}$, $\quad j=\overline{1,k}$.

Am obţinut astfel expresia vectorului e_{k+1} :

$$e_{k+1} = f_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle f_{k+1}, e_i\rangle}{\langle e_i, e_i\rangle} e_i$$

Ţinând cont de această expresie şi de faptul că $e_i \in W_k, i=\overline{1,k}$ rezultă $W'_{k+1} \subseteq W_{k+1}$. Pe de altă parte, din

$$f_{k+1} = e_{k+1} + \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle f_{k+1}, e_i\rangle}{\langle e_i, e_i\rangle} e_i$$

obţinem $W_{k+1} \subseteq W'_{k+1}$, deci $W'_{k+1} = W_{k+1}$. $\diamondsuit$

Observaţia 3.6.1 (i) În orice spaţiu vectorial euclidian există baze ortogonale.

(ii) Fie $B=\{f_1,\dots,f_n\}$ o bază a spaţiului euclidian V. Conform Teoremei 3.6.1, $B'=\{e_1,\dots,e_n\}$, unde

$$e_1 = f_1, e_{k+1} = f_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle f_{k+1}, e_i\rangle}{\langle e_i, e_i\rangle} e_i, \quad k=\overline{0,n-1}$$

este o bază ortogonală a spaţiului euclidian V.

Notăm $\dfrac{e_k}{\|e_k\|} = \dfrac{1}{\|e_k\|}e_k$, $k=\overline{1,n}$. Putem pune în evidenţă o bază ortonormată a spaţiului vectorial V :

$$B'' = \left\{ \frac{e_1}{\|e_1\|}, \frac{e_2}{\|e_2\|}, \dots, \frac{e_n}{\|e_n\|} \right\}$$

Exemplu: În spaţiul vectorial $\mathbb{R}^3$ considerăm produsul scalar canonic

$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

şi sistemul de vectori $B=\{f_1=(1,-2,2); f_2=(-1,0,-1); f_3=(5,-3,-7)\}$.

Să verificăm mai întâi că B este o bază a lui $\mathbb{R}^3$, apoi vom preciza o bază ortonormată B' şi o bază ortogonală B''.

Faptul că B este bază rezultă din $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 \\ -2 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & -7 \end{vmatrix} = 27 \neq 0$

Fie $B' = \{e_1, e_2, e_3\}$, unde vectorii e_1, e_2, e_3 sunt daţi de formulele din Observaţia 3.6.1 (ii):

$e_1 = f_1 = (1, -2, 2)$

$e_2 = f_2 - \dfrac{\langle f_2, e_1\rangle}{\langle e_1, e_1\rangle} e_1 = \left(-\dfrac{2}{3}, -\dfrac{2}{3}, -\dfrac{1}{3}\right)$

$e_3 = f_3 - \dfrac{\langle f_3, e_1\rangle}{\langle e_1, e_1\rangle} e_1 - \dfrac{\langle f_3, e_2\rangle}{\langle e_2, e_2\rangle} e_2 = (6, -3, -6)$

Baza ortonormată corespunzătoare bazei B este

$$B' = \left\{e_1 = (1, -2, 2); e_2 = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right); e_3 = (6, -3, -6)\right\}$$

Să găsim acum vectorii bazei B'', la fel ca în Observaţia 3.6.1 (iii):

$\dfrac{e_1}{\|e_1\|} = \dfrac{1}{\sqrt{1+4+4}} \cdot (1, -2, 2) = \left(\dfrac{1}{3}, -\dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{3}\right)$

$\dfrac{e_2}{\|e_2\|} = \left(-\dfrac{2}{3}, -\dfrac{2}{3}, -\dfrac{1}{3}\right)$

$\dfrac{e_3}{\|e_3\|} = \left(\dfrac{2}{3}, -\dfrac{1}{3}, -\dfrac{2}{3}\right)$

$$B'' = \left\{\frac{e_1}{\|e_1\|}; \frac{e_2}{\|e_2\|}; \frac{e_3}{\|e_3\|}\right\} = \left\{\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right); \left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right); \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)\right\}$$

Capitolul 4

Vectori liberi

4.1 Vectori liberi. Operaţii cu vectori liberi

Fie X şi Y două mulţimi nevide şi $X \times Y = \{(x, y)|\ x \in X,\ y \in Y\}$ produsul lor cartezian. Fie $G \subset X \times Y$.

Tripletul $\rho = (G, X, Y)$ se numeşte *relaţie binară* de la mulţimea X la mulţimea Y iar G se numeşte *graficul* relaţiei ρ. Dacă $(x, y) \in G$, spunem că x este în relaţia ρ cu y şi scriem $x\rho y$. Dacă $Y = X$, atunci $\rho = (G, X)$ se numeşte relaţie binară pe X.

Relaţia binară $\rho = (G, X)$ se numeşte:

- *reflexivă* dacă $x\rho x,\ \forall\ x \in X$;
- *simetrică* dacă $x\rho y\ \Rightarrow\ y\rho x,\ \forall\ x, y \in X$;
- *antisimetrică* dacă $x\rho y$ şi $y\rho x\ \Rightarrow\ x = y,\ \forall\ x, y \in X$;
- *tranzitivă* dacă $x\rho y$ şi $y\rho z\ \Rightarrow\ x\rho z,\ \forall\ x, y, z \in X$.

O relaţie binară $\rho = (G, X)$ se numeşte *relaţie de ordine* pe X dacă ρ este reflexivă, antisimetrică şi tranzitivă.

ρ este o *relaţie de echivalenţă* pe X dacă este reflexivă, simetrică şi tranzitivă. În acest caz, mulţimea

$$\widehat{x} = \{y \in X|\ x\rho y\}$$

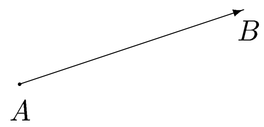
se numeşte *clasa de echivalenţă* a elementului $x \in X$ în raport cu relaţia ρ.

Mulţimea claselor de echivalenţă ale elementelor din X în raport cu relaţia ρ se numeşte *mulţime factor (cât)* a lui X prin echivalenţa ρ şi se notează prin

$$X/\rho = \{\widehat{x}|\ x \in X\}.$$

În continuare vom nota cu E_3 spaţiul geometriei elementare. Elementele acestui spaţiu le numim puncte.

Definiţia 4.1.1 O pereche ordonată de puncte $(A, B) \in E_3 \times E_3$ se numeşte *segment orientat*, reprezentat prin $\overrightarrow{AB}$,



în care A se numeşte originea segmentului orientat, iar B este extremitatea sa. Dacă $A = B$ se obţine segmentul "orientat" nul $\overrightarrow{AA}$.

Dreapta determinată de punctele A şi B se numeşte dreaptă suport a segmentului orientat $\overrightarrow{AB}$.

Definiţia 4.1.2 Două segmente orientate nenule $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{CD}$ au aceeaşi *direcţie* dacă dreptele lor suport sunt paralele sau coincid.

Două segmente orientate nenule care au aceeaşi direcţie au acelaşi *sens* dacă extremităţile lor sunt în acelaşi semiplan determinat de dreapta ce uneşte originile celor două segmente orientate.

Definiţia 4.1.3 Se numeşte *norma* unui segment orientat $\overrightarrow{AB}$ distanţa

$$d(A, B) \overset{not}{=} \|\overrightarrow{AB}\|.$$

Definiţia 4.1.4 Două segmente orientate nenule sunt *echipolente* dacă au aceeaşi direcţie, acelaşi sens şi aceeaşi normă.

Vom nota relaţia de echipolenţă prin " $\sim$ ".

Evident, segmentele orientate nule nu au direcţie şi nici sens. Prin definiţie, toate segmentele orientate nule sunt echipolente între ele.

Observaţia 4.1.1 Definiţia 4.1.4 se mai poate formula astfel:

$\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$ dacă $ABDC$ este un paralelogram (sau un paralelogram degenerat) sau, echivalent, dacă segmentele $[AD]$ şi $[BC]$ au acelaşi mijloc.

Observăm că relaţia de echipolenţă " $\sim$ " este o relaţie de echivalenţă pe mulţimea segmentelor orientate.

Definiţia 4.1.5 Se numeşte *vector liber* orice clasă de echivalenţă în raport cu relaţia de echipolenţă. Orice segment orientat dintr-o clasă de echivalenţă se numeşte *reprezentant* al vectorului liber.

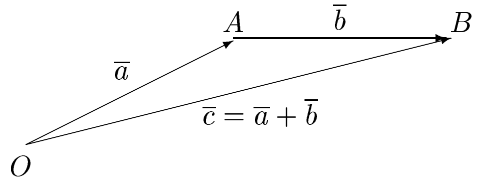
Notaţie: $V_3 = E_3 \times E_3/\sim$ este mulţimea vectorilor liberi din spaţiu.

Dacă $\overline{a}$ este un vector liber şi $\overrightarrow{AB} \in \overline{a}$, citim "$\overrightarrow{AB}$ este un reprezentant al vectorului liber $\overline{a}$". Definim $\|\overline{a}\| = \|\overrightarrow{AB}\|$. Direcţia (sensul) unui vector liber este dată de direcţia (sensul) unui reprezentant al său.

Vectorul $\overline{0}$ de reprezentant $\overrightarrow{AA}$ se numeşte vectorul nul. Evident, $\|\overline{0}\| = 0$.

Un vector liber $\overline{a}_0$ cu proprietatea $\|\overline{a}_0\| = 1$ se numeşte versor.

Definiţia 4.1.6 (i) Fie $\overline{a}, \overline{b} \in V_3$ astfel încât $\overrightarrow{OA} \in \overline{a}$ şi $\overrightarrow{AB} \in \overline{b}$. Vectorul liber $\overline{c}$ de reprezentant $\overrightarrow{OB}$ se numeşte *suma* vectorilor $\overline{a}$ şi $\overline{b}$, iar regula cuprinsă în această definiţie se numeşte regula triunghiului.



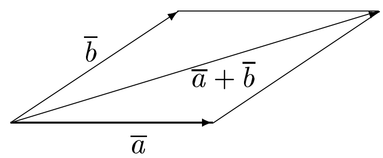
(ii) Fie $\overline{a} \in V_3$ şi $k \in \mathbb{R}$.

Dacă $k = 0$ sau $\overline{a} = \overline{0}$ definim $k \cdot \overline{a} = \overline{0}$.

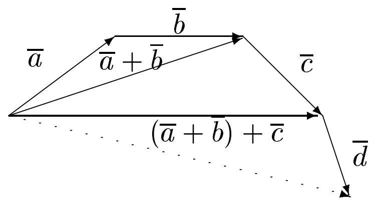
Dacă $k \neq 0$ şi $\overline{a} \neq \overline{0}$, atunci $k \cdot \overline{a}$ are aceeaşi direcţie cu $\overline{a}$, acelaşi sens cu $\overline{a}$ pentru $k > 0$ respectiv sens opus lui $\overline{a}$ dacă $k < 0$, iar norma este $\|k \cdot \overline{a}\| = |k| \cdot \|\overline{a}\|$.

Cele două operaţii definite mai sus *nu depind de alegerea reprezentanţilor.*

Observaţia 4.1.2 (i) Adunarea vectorilor liberi se poate efectua şi cu *regula paralelogramului:*



(ii) Regula triunghiului se poate extinde la *regula poligonului*, atunci când adunăm $n \geq 3$ vectori liberi:



Teorema 4.1.1 *Mulţimea V_3 a vectorilor liberi înzestrată cu operaţia internă de adunare a vectorilor şi cu operaţia externă de înmulţire a unui vector cu un scalar este spaţiu vectorial real.*

Demonstraţia este un simplu exerciţiu. Precizăm doar faptul că zeroul acestui spaţiu vectorial este vectorul nul $\overline{0}$, iar pentru $\overline{a} \in V_3$ vectorul opus este $-\overline{a} = (-1) \cdot \overline{a}$.

4.2 Coliniaritate şi coplanaritate

Vom spune că vectorii liberi $\overline{a}, \overline{b}$ sunt coliniari dacă reprezentanţii lor au aceeaşi direcţie. Vectorii liberi $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ sunt coplanari dacă reprezentanţii lor au direcţiile paralele cu un acelaşi plan.

Propoziţia 4.2.1 *Vectorii nenuli $\overline{a}, \overline{b}$ sunt coliniari dacă şi numai dacă $\{\overline{a}, \overline{b}\}$ este un sistem liniar dependent.*

Demonstraţie: " $\Rightarrow$ " Presupunem că $\overline{a}, \overline{b} \neq \overline{0}$ sunt coliniari. Arătăm că există $k \in \mathbb{R}$ unic astfel încât $\overline{b} = k \cdot \overline{a}$.

Fie $\overline{a}_0 = \dfrac{\overline{a}}{\|\overline{a}\|} = \dfrac{1}{\|\overline{a}\|} \cdot \overline{a}$ şi $\overline{b}_0 = \dfrac{\overline{b}}{\|\overline{b}\|} = \dfrac{1}{\|\overline{b}\|} \cdot \overline{b}$ versorii corespunzători celor doi vectori. Deoarece $\overline{a}$ şi $\overline{b}$ sunt coliniari, rezultă că $\overline{a}_0$ şi $\overline{b}_0$ sunt coliniari, adică $\overline{b}_0 = \pm \overline{a}_0$. Folosind expresiile corespunzătoare versorilor, avem $\dfrac{\overline{b}}{\|\overline{b}\|} = \pm \dfrac{\overline{a}}{\|\overline{a}\|}$ deci $\overline{b} = \pm \dfrac{\|\overline{b}\|}{\|\overline{a}\|} \cdot \overline{a}$. Notăm $k = \pm \dfrac{\|\overline{b}\|}{\|\overline{a}\|}$. Obţinem $\overline{b} = k \cdot \overline{a}$, relaţie care se mai poate scrie sub forma $k \cdot \overline{a} + (-1) \cdot \overline{b} = \overline{0}$. În concluzie $\{\overline{a}, \overline{b}\}$ este un sistem liniar dependent.

" $\Leftarrow$ Presupunem acum că $\{\overline{a}, \overline{b}\}$ este un sistem liniar dependent. Atunci există $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$, de exemplu $k_2 \neq 0$, astfel încât $k_1 \cdot \overline{a} + k_2 \cdot \overline{b} = \overline{0}$ sau $\overline{b} = k \cdot \overline{a}$, unde $k = -\dfrac{k_1}{k_2} \in \mathbb{R}$. Egalitatea $\overline{b} = k \cdot \overline{a}$ arată, de fapt, că $\overline{a}$ şi $\overline{b}$ sunt coliniari. În plus, k este unic cu această proprietate. $\diamondsuit$

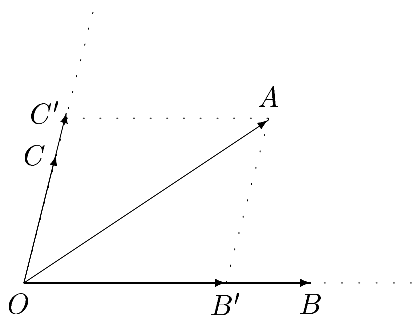
Observaţia 4.2.1 Vectorii nenuli $\overline{a}, \overline{b}$ sunt coliniari dacă şi numai dacă $\exists\ k \in \mathbb{R}$ unic astfel încât $\overline{b} = k \cdot \overline{a}$.

Propoziţia 4.2.2 *Vectorii nenuli $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \in V_3$ sunt coplanari dacă şi numai dacă $\{\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}\}$ este un sistem liniar dependent.*

Demonstraţie: " $\Rightarrow$ " Presupunem că $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \neq \overline{0}$ sunt coplanari. Arătăm că există $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ astfel încât $\overline{a} = \alpha\overline{b} + \beta\overline{c}$.

Fie $\overrightarrow{OA} \in \overline{a}$, $\overrightarrow{OB} \in \overline{b}$, $\overrightarrow{OC} \in \overline{c}$. Deoarece $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ sunt coplanari, segmentele orientate $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ şi $\overrightarrow{OC}$ sunt coplanare.

Prin A ducem $AB' \| OC$ şi $AC' \| OB$.



$\overrightarrow{OB'}$ şi $\overrightarrow{OB}$ sunt coliniari, deci $\exists\ \alpha \in \mathbb{R}$ unic astfel încât $\overrightarrow{OB'} = \alpha \cdot \overrightarrow{OB}$. La fel, $\overrightarrow{OC'}$ şi $\overrightarrow{OC}$ fiind coliniari, $\exists\ \beta \in \mathbb{R}$ unic astfel încât $\overrightarrow{OC'} = \beta \cdot \overrightarrow{OC}$.

Acum putem scrie

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'} = \alpha \cdot \overrightarrow{OB} + \beta \cdot \overrightarrow{OC}$$

de unde rezultă

$$\overline{a} = \alpha \cdot \overline{b} + \beta \cdot \overline{c}$$

ceea ce arată că $\{\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}\}$ este un sistem liniar dependent.

" $\Leftarrow$ " Presupunem că $\{\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}\} \subset V_3$ este un sistem liniar dependent, adică există $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$, de exemplu $k_1 \neq 0$, astfel încât $k_1 \cdot \overline{a} + k_2 \cdot \overline{b} + k_3 \cdot \overline{c} = \overline{0}$. Cu notaţiile $\alpha = -\dfrac{k_2}{k_1}$ şi $\beta = -\dfrac{k_3}{k_1}$ putem scrie $\overline{a} = \alpha\overline{b} + \beta\overline{c}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Evident vectorul $\overline{a}$ este în acelaşi plan cu $\overline{b}$ şi $\overline{c}$. $\diamondsuit$

Observaţia 4.2.2 (i) $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ sunt coplanari dacă şi numai dacă $\exists\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ astfel încât $\overline{a} = \alpha\overline{b} + \beta\overline{c}$.

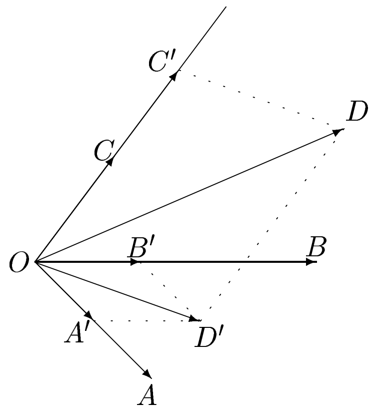
(ii) Orice trei vectori liberi necoplanari sunt liniar independenţi.

Teorema 4.2.1 $\dim_{\mathbb{R}} V_3 = 3$.

Demonstraţie: Fie $\{\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}\}$ un sistem de vectori necoplanari. Pe baza Observaţiei 4.2.2(ii) rezultă că $\{\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}\}$ este sistem liniar independent.

E suficient să demonstrăm că $\{\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}\}$ este sistem de generatori al spaţiului vectorial V_3.

Fie $\overline{d} \in V_3$ arbitrar. Fie $\overrightarrow{OA} \in \overline{a}$, $\overrightarrow{OB} \in \overline{b}$, $\overrightarrow{OC} \in \overline{c}$ şi $\overrightarrow{OD} \in \overline{d}$. Ducem $DD' \| OC$, $D'A' \| OB$, $D'B' \| OA$, $DC' \| OD'$.



Aplicăm regula paralelogramului şi Observaţia 4.2.1 şi avem:

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OD'} + \overrightarrow{OC'} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'} = \alpha \cdot \overrightarrow{OA} + \beta \cdot \overrightarrow{OB} + \gamma \cdot \overrightarrow{OC}$$

de unde obţinem

$$\overline{d} = \alpha\overline{a} + \beta\overline{b} + \gamma\overline{c}$$

Am arătat că $\{\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}\}$ este bază în spaţiul vectorial V_3, de unde rezultă că $\dim_{\mathbb{R}} V_3 = 3$. $\diamondsuit$

Concluzia este următoarea: $(V_3, +, \cdot, \mathbb{R})$ *este spaţiu vectorial de dimensiune 3, în care orice trei vectori liberi necoplanari formează o bază.*

Observăm că numerele unice $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ce apar în demonstraţia Teoremei 4.2.1 reprezintă coordonatele vectorului $\overline{d}$ în baza $\{\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}\}$.

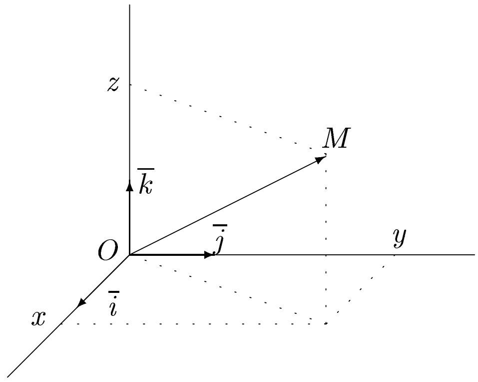
Definiţia 4.2.1 Fie $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k} \in V_3$ versori având direcţiile două câte două perpendiculare.

Baza $\{\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$ se numeşte *bază ortonormată* a spaţiului vectorial V_3.

Dacă $\overline{a} \in V_3$, $\overline{a} = a_1 \cdot \overline{i} + a_2 \cdot \overline{j} + a_3 \cdot \overline{k}$, scalarii $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ se numesc *coordonatele euclidiene* ale vectorului liber $\overline{a}$ în raport cu baza $\{\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$.

Definiţia 4.2.2 Fie $O \in E_3$ fixat şi $\{\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$ o bază ortonormată. Perechea $R = (O, \{\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\})$ se numeşte *reper cartezian ortonormat.*

Fie $M \in E_3$ arbitrar. Vectorul $\overline{r}_M$ de reprezentant $\overrightarrow{OM}$ se numeşte *vectorul de poziţie* al punctului M. Dacă $\overline{r}_M = x \cdot \overline{i} + y \cdot \overline{j} + z \cdot \overline{k}$, notăm $M(x, y, z)$.



Observaţia 4.2.3 Dacă $M_1, M_2 \in E_3$ astfel încât $\overrightarrow{OM_1} \in \overline{r_1}$ şi $\overrightarrow{OM_2} \in \overline{r_2}$,

$$\overline{r_1} = x_1 \cdot \overline{i} + y_1 \cdot \overline{j} + z_1 \cdot \overline{k}$$

$$\overline{r_2} = x_2 \cdot \overline{i} + y_2 \cdot \overline{j} + z_2 \cdot \overline{k}$$

atunci putem scrie: $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}$, $\overrightarrow{M_1M_2} \in \overline{v}$,

$$\overline{v} = (x_2 - x_1)\overline{i} + (y_2 - y_1)\overline{j} + (z_2 - z_1)\overline{k}.$$

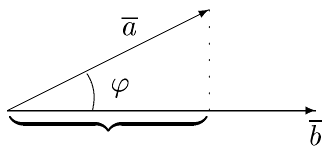
Definiţia 4.2.3 (i) Fie $\overrightarrow{AB} \in E_3 \times E_3$. Se numeşte proiecţie ortogonală a segmentului orientat $\overrightarrow{AB}$ pe dreapta d segmentul orientat $\overrightarrow{A'B'}$, unde $A' = pr_d A$ şi $B' = pr_d B$. Se numeşte *proiecţia* vectorului $\overline{a}$ pe vectorul $\overline{b}$ clasa de echivalenţă în raport cu "$\sim$" a proiecţiei unui reprezentant al vectorului $\overline{a}$ pe suportul unui reprezentant al vectorului $\overline{b}$.

(ii) Fie $\overline{a}, \overline{b} \in V_3$. Se numeşte *unghiul* celor doi vectori, $\varphi \in [0, \pi]$, măsura unghiului $\sphericalangle(AOB)$ format de suporturile a doi reprezentanţi $\overrightarrow{OA} \in \overline{a}$ şi $\overrightarrow{OB} \in \overline{b}$. Acesta este independent de alegerea reprezentanţilor.

Notăm $\varphi = \sphericalangle(\overline{a}, \overline{b})$. Dacă $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$, unde $\varphi = \sphericalangle(\overline{a}, \overline{b})$, vectorii $\overline{a}$ şi $\overline{b}$ se numesc ortogonali şi notăm $\overline{a} \perp \overline{b}$.

(iii) Numărul $pr_{\overline{b}}\overline{a} = \|\overline{a}\| \cdot \cos\varphi$, unde $\varphi = \sphericalangle(\overline{a}, \overline{b})$, se numeşte mărimea algebrică a proiecţiei ortogonale a lui $\overline{a}$ pe $\overline{b}$.

Vectorul $pr_d\overline{a} = \|\overline{a}\| \cdot \cos\varphi \cdot \dfrac{\overline{b}}{\|\overline{b}\|}$ se numeşte proiecţia lui $\overline{a}$ pe dreapta d, d fiind dreapta suport a lui $\overline{b}$.



Propoziţia 4.2.3 *Au loc următoarele proprietăţi:*
(i) $pr_{\overline{b}}(\overline{a}_1 + \overline{a}_2) = pr_{\overline{b}}\overline{a}_1 + pr_{\overline{b}}\overline{a}_2, \ \forall\, \overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{b} \in V_3$
(ii) $pr_{\overline{b}}(k \cdot \overline{a}) = |k| \cdot pr_{\overline{b}}\overline{a}, \ \forall\, \overline{a}, \overline{b} \in V_3, \ k \in \mathbb{R}.$

Fără demonstraţie.

4.3 Produse de vectori liberi

Definiţia 4.3.1 Fie $\overline{a}, \overline{b} \in V_3$ şi $\varphi = \sphericalangle(\overline{a}, \overline{b})$. Se numeşte *produs scalar* al vectorilor $\overline{a}$ şi $\overline{b}$ numărul real

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = \begin{cases} 0, \text{ dacă } \overline{a} = \overline{0} \text{ sau } \overline{b} = \overline{0} \\ \|\overline{a}\| \cdot \|\overline{b}\| \cdot \cos\varphi, \text{ altfel} \end{cases}$$

Propoziţia 4.3.1 *Produsul scalar al vectorilor liberi are proprietăţile următoare:*
(i) $\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{b} \cdot \overline{a}, \forall\, \overline{a}, \overline{b} \in V_3$
(ii) $k \cdot (\overline{a} \cdot \overline{b}) = (k \cdot \overline{a}) \cdot \overline{b} = \overline{a} \cdot (k \cdot \overline{b}), \forall\, \overline{a}, \overline{b} \in V_3, \ k \in \mathbb{R}$
(iii) $\overline{a} \cdot (\overline{b} + \overline{c}) = \overline{a} \cdot \overline{b} + \overline{a} \cdot \overline{c}, \forall\, \overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \in V_3$
(iv) $\overline{a} \cdot \overline{a} \geq 0, \ \forall\, \overline{a} \in V_3; \ \overline{a} \cdot \overline{a} = 0 \ \Leftrightarrow \ \overline{a} = \overline{0}$
(v) $\forall\, \overline{a}, \overline{b} \in V_3, \ \overline{a}, \overline{b} \neq \overline{0}$, *avem* $\cos\sphericalangle(a, b) = \dfrac{\overline{a} \cdot \overline{b}}{\|\overline{a}\| \cdot \|\overline{b}\|}$
(vi) Fie $R = (O, \{\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\})$ *un reper cartezian ortonormat şi fie* $\overline{a}, \overline{b} \in V_3$,

$$\overline{a} = a_1 \cdot \overline{i} + a_2 \cdot \overline{j} + a_3 \cdot \overline{k}, \quad \overline{b} = b_1 \cdot \overline{i} + b_2 \cdot \overline{j} + b_3 \cdot \overline{k}.$$

Atunci avem:

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$$
$$\|\overline{a}\| = \sqrt{\overline{a} \cdot \overline{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

Demonstraţie: Proprietăţile de mai sus se stabilesc uşor, pe baza definiţiei. Justificăm doar afirmaţia (iii).

Observăm că $\overline{a} \cdot \overline{b} = \|\overline{a}\| \cdot \|\overline{b}\| \cos\varphi = \|\overline{a}\| \cdot pr_{\overline{a}}\overline{b}$. Din Propoziţia 4.2.3 rezultă $\overline{a} \cdot (\overline{b} + \overline{c}) = \|\overline{a}\| \cdot pr_{\overline{a}}(\overline{b} + \overline{c}) = \|\overline{a}\|(pr_{\overline{a}}\overline{b} + pr_{\overline{a}}\overline{c}) = \overline{a} \cdot \overline{b} + \overline{a} \cdot \overline{c} \diamondsuit$

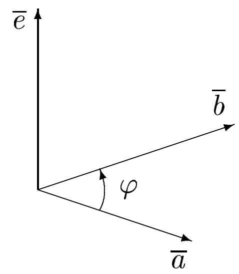
Observaţia 4.3.1 Dacă $R = (O, \{\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\})$ este un reper cartezian ortonormat, atunci avem:

$\cdot$	$\overline{i}$	$\overline{j}$	$\overline{k}$
$\overline{i}$	1	0	0
$\overline{j}$	0	1	0
$\overline{k}$	0	0	1

Definiţia 4.3.2 Fie $\overline{a}, \overline{b} \in V_3$, $\varphi = \sphericalangle(\overline{a}, \overline{b})$. Se numeşte *produs vectorial* al vectorilor $\overline{a}$ şi $\overline{b}$ vectorul

$$\overline{a} \times \overline{b} = \begin{cases} \overline{0}, \text{ dacă } \overline{a} = 0 \text{ sau } \overline{b} = 0 \text{ sau } \overline{a}, \overline{b} \text{ coliniari} \\ \|\overline{a}\| \cdot \|\overline{b}\| \sin\varphi \cdot \overline{e}, \text{ altfel} \end{cases}$$

unde $\overline{e}$ este un versor perpendicular pe planul vectorilor $\overline{a}$ şi $\overline{b}$, având sensul astfel încât sensul lui $\overline{e}$ este cel al înaintării burghiului dacă se roteşte $\overline{a}$ în planul vectorilor $\overline{a}$ şi $\overline{b}$ până când acesta se suprapune peste $\overline{b}$ astfel încât unghiul rotaţiei să fie mai mic decât π.



Observaţia 4.3.2 Pentru norma produsului vectorial avem următoarea interpretare geometrică:
$\|\overline{a} \times \overline{b}\|$ este aria paralelogramului construit pe vectorii $\overline{a}$ şi $\overline{b}$.

Reperele carteziene în spaţiu (cât şi în plan) se împart în două categorii:
1. repere carteziene direct orientate
2. repere carteziene invers orientate.

Fie $R = (O; \{\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\})$ un reper cartezian ortonormat. Observăm că putem avea $\overline{i} \times \overline{j} = \overline{k}$ sau $\overline{i} \times \overline{j} = -\overline{k}$.

Definiţia 4.3.3 Vom spune că reperul cartezian ortonormat $R = (O; \{\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\})$ este *orientat direct* dacă $\overline{i} \times \overline{j} = \overline{k}$. Dacă $\overline{i} \times \overline{j} = -\overline{k}$, atunci reperul cartezian ortonormat R se numeşte *invers orientat.*

Propoziţia 4.3.2 *Produsul vectorial al vectorilor liberi are următoarele proprietăţi:*
(i) $\overline{a} \times \overline{b} = -\overline{b} \times \overline{a}, \ \forall\ \overline{a}, \overline{b} \in V_3$
(ii) $k \cdot (\overline{a} \times \overline{b}) = (k \cdot \overline{a}) \times \overline{b} = \overline{a} \times (k \cdot \overline{b}), \ \forall\ \overline{a}, \overline{b} \in V_3, \ k \in \mathbb{R}$
(iii) $\overline{a} \times (\overline{b} + \overline{c}) = \overline{a} \times \overline{b} + \overline{a} \times \overline{c}, \ \forall\ \overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \in V_3$
(iv) $\overline{a} \times \overline{a} = \overline{0}, \ \forall\ \overline{a} \in V_3$
$\overline{a} \times \overline{b} = \overline{0} \ \Leftrightarrow \ \overline{a}, \overline{b}$ *sunt liniar dependenţi*

(v) $\|\overline{a}\times\overline{b}\|^2+(\overline{a}\cdot\overline{b})^2=\|\overline{a}\|^2\cdot\|\overline{b}\|^2$, $\forall\ \overline{a},\overline{b}\in V_3$ (identitatea lui Lagrange)

(vi) Fie $R=(O,\{\overline{i},\overline{j},\overline{k}\})$ un reper cartezian ortonormat direct orientat şi $\overline{a},\overline{b}\in V_3$,

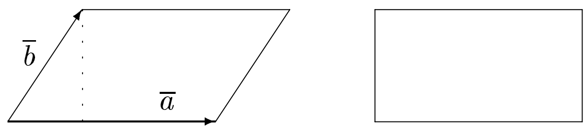
$$\overline{a}=a_1\cdot\overline{i}+a_2\cdot\overline{j}+a_3\cdot\overline{k},\quad \overline{b}=b_1\cdot\overline{i}+b_2\cdot\overline{j}+b_3\cdot\overline{k}.$$

Produsul vectorial al vectorilor $\overline{a}$ şi $\overline{b}$ se calculează cu ajutorul determinantului formal

$$\overline{a}\times\overline{b}=\begin{vmatrix}\overline{i}&\overline{j}&\overline{k}\\ a_1&a_2&a_3\\ b_1&b_2&b_3\end{vmatrix}$$

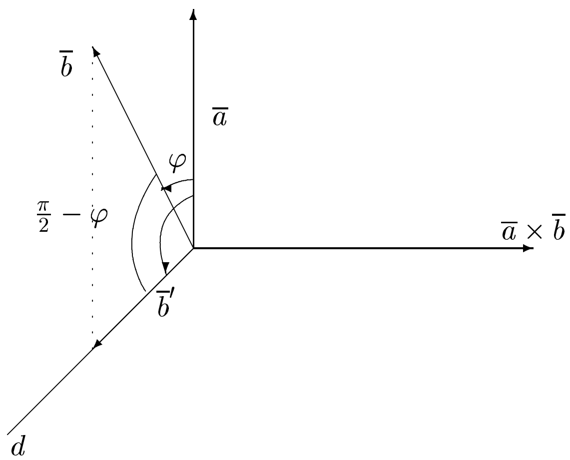
Demonstraţie: Justificăm doar afirmaţia (iii).

Ideea demonstraţiei este faptul că patrulaterele de mai jos au aceeaşi arie.



Fie d o dreaptă perpendiculară pe $\overline{a}$ şi $\overline{a}\times\overline{b}$ şi fie $\overline{b}'$ proiecţia ortogonală a vectorului $\overline{b}$ pe dreapta d.

Demonstrăm că $\|\overline{a}\times\overline{b}\|=\|\overline{a}\times\overline{b}'\|$.



$$\|\overline{a}\times\overline{b}'\|=\|\overline{a}\|\cdot\|\overline{b}'\|\cdot\sin\sphericalangle(\overline{a},\overline{b})=\|\overline{a}\|\cdot\|\overline{b}'\|=$$
$$=\|\overline{a}\|\cdot\|\overline{b}\|\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\|\overline{a}\|\cdot\|\overline{b}\cdot\sin\varphi=\|\overline{a}\times\overline{b}\|$$

Pe de altă parte, $\overline{b}' \perp \overline{a}$, $\overline{b}' \perp \overline{a}\times\overline{b}$, iar $\overline{a}, \overline{b}$ şi $\overline{b}'$ sunt coplanari, de unde rezultă că $\overline{a}\times\overline{b}$ şi $\overline{a}\times\overline{b}'$ coliniari. Aceşti vectori au acelaşi sens.

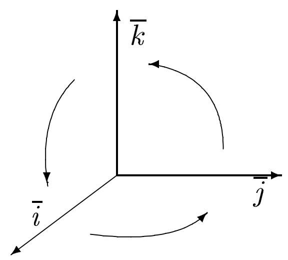
Fie $\overline{c}' = pr_d\overline{c}$. Evident, $\overline{b}'$ şi $\overline{c}'$ sunt coliniari; din Observaţia 4.2.1 rezultă că $\exists\alpha \in \mathbb{R}$ nenul, unic, astfel încât $\overline{c}' = \alpha\cdot\overline{b}'$. Vom avea, de asemenea, $\overline{a}\times\overline{c} = \overline{a}\times\overline{c}'$.

Calculăm acum $\overline{a}\times(\overline{b}+\overline{c})$.

$\overline{a}\times(\overline{b}+\overline{c}) = \overline{a}\times pr_d(\overline{b}+\overline{c}) = \overline{a}\times(pr_d\overline{b}+pr_d\overline{c}) = \overline{a}\times(\overline{b}'+\overline{c}') = \overline{a}\times(\overline{b}'+\alpha\overline{b}') = \overline{a}\times((1+\alpha)\cdot\overline{b}') = (1+\alpha)\cdot\overline{a}\times\overline{b}' = \overline{a}\times\overline{b}'+\overline{a}\times(\alpha\overline{b}') = \overline{a}\times\overline{b}'+\overline{a}\times\overline{c}' = \overline{a}\times\overline{b}+\overline{a}\times\overline{c}$
$\diamondsuit$

Observaţia 4.3.3 Dacă $R = (O, \{\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\})$ este un reper cartezian ortonormat direct orientat, avem:

$\times$	$\overline{i}$	$\overline{j}$	$\overline{k}$
$\overline{i}$	0	$\overline{k}$	$-\overline{j}$
$\overline{j}$	$-\overline{k}$	0	$\overline{i}$
$\overline{k}$	$\overline{j}$	$-\overline{i}$	0



Definiţia 4.3.4 Fie $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \in V_3$. Se numeşte *produs mixt* al acestor vectori numărul real

$$(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = \overline{a}\cdot(\overline{b}\times\overline{c})$$

Propoziţia 4.3.3 *Produsul mixt al vectorilor liberi are următoarele proprietăţi:*

(i) $(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = (\overline{b}, \overline{c}, \overline{a}) = -(\overline{a}, \overline{c}, \overline{b})$, $\forall\ \overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \in V_3$

(ii) $(\overline{a}+\overline{b}, \overline{c}, \overline{d}) = (\overline{a}, \overline{c}, \overline{d}) + (\overline{b}, \overline{c}, \overline{d})$, $\forall\ \overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, \overline{d} \in V_3$

(iii) $(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = 0 \Leftrightarrow$ *un vector este* $\overline{0}$ *sau doi vectori sunt coliniari sau vectorii* $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ *sunt coplanari.*

(iv) Fie $R = (O, \{\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$ *un reper cartezian ortonormat direct orientat şi fie* $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \in V_3$,

$$\overline{a} = a_1\overline{i} + a_2\overline{j} + a_3\overline{k},\ \ \overline{b} = b_1\overline{i} + b_2\overline{j} + b_3\overline{k},\ \ \overline{c} = c_1\overline{i} + c_2\overline{j} + c_3\overline{k}.$$

Atunci avem:

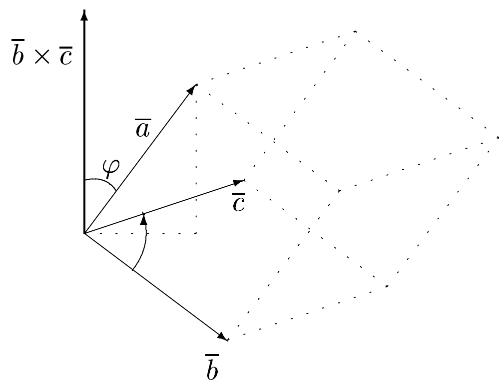
$$(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Demonstraţia este imediată.

Observaţia 4.3.4 Produsul mixt al vectorilor liberi are următoarea interpretare geometrică: $|(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c})|$ este volumul paralelipipedului construit pe cei trei vectori.

Justificarea este următoarea:

$$|(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c})| = |\overline{a} \cdot (\overline{b} \times \overline{c})| = \|\overline{a}\| \cdot \|\overline{b} \times \overline{c}\| \cdot |\cos\varphi| = h \cdot \|\overline{b} \times \overline{c}\| = v.$$



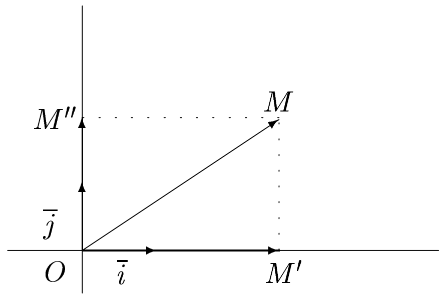
Capitolul 5

Dreapta în plan

5.1 Sisteme de coordonate în plan

Fie E_2 planul euclidian şi V_2 spaţiul vectorilor liberi din planul E_2, obţinut analog spaţiului vectorial V_3. Fie O un punct fixat în E_2, numit origine şi $B = \{\overline{i}, \overline{j}\}$ o bază ortonormată în V_2.

Fie $M \in E_2$ un punct arbitrar; avem $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'} + \overrightarrow{OM''}$. Fie $\overrightarrow{OM'} \in \overline{r}_{M'}$ şi $\overrightarrow{OM"} \in \overline{r}_{M"}$.



Vectorii $\overline{r}_{M'}$ şi $\overline{i}$ sunt coliniari, deci există $x \in \mathbb{R}$ unic astfel încât $\overline{r}_{M'} = x \cdot \overline{i}$. La fel, vectorii $\overline{j}$ şi $\overline{r}_{M"}$ fiind coliniari, există $y \in \mathbb{R}$ unic astfel încât $\overline{r}_{M"} = y \cdot \overline{j}$.

Atunci vectorul de poziţie al punctului M, $\overline{r}_M$, are expresia

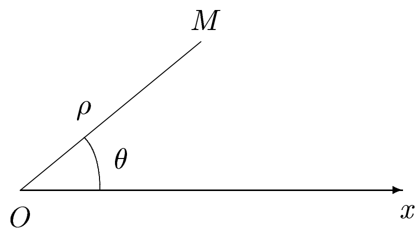
$$\overline{r}_M = x \cdot \overline{i} + y \cdot \overline{j}$$

Definiţia 5.1.1 Ansamblul $R = (0, \{\overline{i}, \overline{j}\})$ se numeşte *reper cartezian ortonormat* în E_2. Coordonatele (x, y) ale vectorului de poziţie $\overline{r}_M$ al punctului M se numesc *coordonate carteziene* ale punctului M în reperul R. Notăm $M(x, y)$.

Un alt tip de coordonate frecvent utilizate în plan sunt coordonatele polare.

Fie $M \in E_2 \setminus \{O\}$ arbitrar. Fixăm o semidreaptă Ox în plan, numită *axa polară*. Notăm $d(O, M) = \rho$, $\sphericalangle(Ox; OM) = \theta$.

Definiţia 5.1.2 $(\rho, \theta) \in [0, +\infty) \times [0, 2\pi)$ definite ca mai sus se numesc *coordonate polare* ale punctului M. Dacă $M = O$, atunci $\rho = 0$, $\theta = 0$.

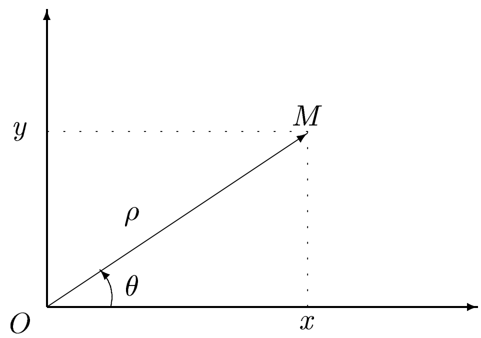


Observaţia 5.1.1 Trecerea de la coordonatele polare la cele carteziene se face prin formulele următoare:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$$

Reciproc, avem

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \operatorname{tg} \theta = \dfrac{y}{x} \end{cases}$$



5.2 Dreapta în plan

Fie $R = (O, \{\bar{i}, \bar{j}\})$ un reper cartezian ortonormat în plan. Fie punctele $M_1(x_1, y_1)$ şi $M_2(x_2, y_2)$ ce determină dreapta d. Fie $M(x, y)$ un punct arbitrar pe această dreaptă.

Propoziţia 5.2.1 *Pentru dreapta d avem următoarele ecuaţii:*
(i) ecuaţia vectorială:

$$\overline{r} = (1-\lambda)\overline{r_1} + \lambda\overline{r_2}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

unde $\overrightarrow{OM} \in \overline{r}$, $\overrightarrow{OM_1} \in \overline{r_1}$, $\overrightarrow{OM_2} \in \overline{r_2}$;
(ii) ecuaţiile parametrice:

$$\begin{cases} x = (1-\lambda)x_1 + \lambda x_2 \\ y = (1-\lambda)y_1 + \lambda y_2 \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

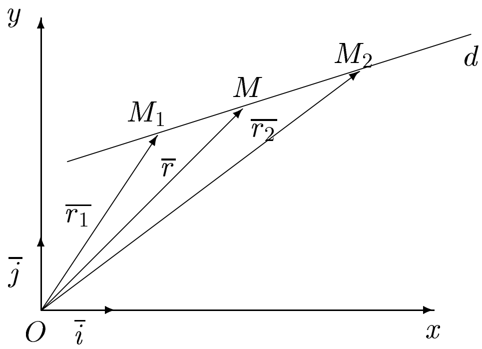
(iii) ecuaţia sub formă de rapoarte:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

(iv) ecuaţia sub formă de determinant:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Demonstraţie:



(i) $\overrightarrow{M_1M}$ şi $\overrightarrow{M_1M_2}$ sunt coliniari, deci există $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât $\overrightarrow{M_1M} = \lambda\overrightarrow{M_1M_2}$. Deoarece $\overline{M_1M} = \overline{r} - \overline{r}_1$ şi $\overline{M_1M_2} = \overline{r}_2 - \overline{r}_1$ obţinem

$$\overline{r} - \overline{r}_1 = \lambda(\overline{r}_2 - \overline{r}_1)$$

sau, echivalent,

$$\overline{r} = (1-\lambda)\overline{r}_1 + \lambda\overline{r}_2, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

(ii) În ecuaţia vectorială (i) înlocuim $\overline{r} = x\overline{i} + y\overline{j}$, $\overline{r}_1 = x_1\overline{i} + y_1\overline{j}$, $\overline{r}_2 = x_2\overline{i} + y_2\overline{j}$ şi obţinem

$$x\overline{i} + y\overline{j} = [(1-\lambda)x_1 + \lambda x_2]\overline{i} + [(1-\lambda)y_1 + \lambda y_2]\overline{j}$$

Deoarece $\{\overline{i}, \overline{j}\}$ este bază a spaţiului vectorial V_2, deducem

$$x = (1-\lambda)x_1 + \lambda x_2, y = (1-\lambda)y_1 + \lambda y_2$$

Afirmaţiile (iii) şi (iv) rezultă imediat din (ii). $\diamondsuit$

Fie d o dreaptă de direcţie $\overline{v} = l \cdot \overline{i} + m \cdot \overline{j}$, $M_0(x_0, y_0)$ un punct dat de pe dreaptă şi fie $M(x, y)$ un punct arbitrar de pe d.

Propoziţia 5.2.2 *Pentru dreapta d avem următoarele ecuaţii:*
(i) ecuaţia vectorială:

$$\overline{r} = \overline{r}_0 + \lambda\overline{v}, \lambda \in \mathbb{R}$$

unde $\overrightarrow{OM} \in \overline{r}$, $\overrightarrow{OM_0} \in \overline{r}_0$;
(ii) ecuaţiile parametrice:

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda l, \\ y = y_0 + \lambda m \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

(iii) ecuaţia sub formă de rapoarte:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}$$

Demonstraţia este analoagă demonstraţiei Propoziţiei 5.2.1.

Propoziţia 5.2.3 *(i) Ecuaţia dreptei* d *ce trece prin punctul* $M_0(x_0, y_0)$ *şi are panta (coeficientul unghiular)* $m = \operatorname{tg} \varphi$, *unde* $\varphi = \sphericalangle(d, Ox)$, *este*

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

(ii) Ecuaţia dreptei d dată prin tăieturi este

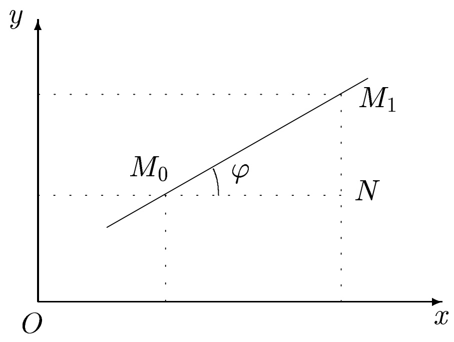
$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} - 1 = 0$$

unde $d \cap Ox = \{A\}$, $d \cap Oy = \{B\}$, $A(p, 0)$, $B(0, q)$.
(iii) Ecuaţia carteziană generală a dreptei este

$$ax + by + c = 0,$$

unde $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a^2 + b^2 > 0$.

Demonstraţie:



Fie $M_1(x_1, y_1) \in d$; putem scrie

$$m = \text{tg } \varphi = \frac{\|\overline{M_1N}\|}{\|\overline{M_0N}\|} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}.$$

Pe de altă parte, ecuaţia dreptei d determinată de M_0 şi M_1 este (Propoziţia 5.2.1(iii))

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}.$$

Obţinem $y - y_0 = m(x - x_0)$.

(ii) Utilizăm, de exemplu, Propoziţia 5.2.1(iv) pentru punctele A şi B.

(iii) Presupunem $b \neq 0$. Fie $\overline{v} = (b, -a)$ astfel încât $a^2 + b^2 \neq 0$ şi punctul $M_0\left(0, -\frac{c}{b}\right)$. Ecuaţia dreptei care trece prin punctul M_0 şi are direcţia $\overline{v}$ este $\frac{x}{b} = \frac{y + c/b}{-a}$ sau $ax + by + c = 0.\diamondsuit$

Propoziţia 5.2.4 *Fie două drepte $(d_1) : a_1x + b_1y + c_1 = 0$ şi $(d_2) : a_2x + b_2y + c_2 = 0$.*

(i) d_1 şi d_2 sunt concurente $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$;

(ii) $d_1 \| d_2$ $\Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$;

(iii) d_1 şi d_2 sunt confundate $\Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$.

Demonstraţie: (i) $d_1 \cap d_2 = \{M\}$ $\Leftrightarrow$ sistemul $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$ are soluţie unică $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$

(ii) $d_1 \| d_2 \Leftrightarrow$ sistemul de mai sus este incompatibil.

Observăm că dacă $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ vom avea

$$rang \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = rang \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} = 2.$$

Conform teoremei Kronecker-Capelli sistemul ar fi compatibil; trebuie să punem condiţiile

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0 \text{ şi } \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

de unde obţinem

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}.$$

(iii) Pentru ca dreptele d_1 şi d_2 să fie confundate, sistemul de mai sus trebuie să fie compatibil nedeterminat, sau, echivalent,

$$rang \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = rang \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} = 1$$

E suficient să impunem condiţiile

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0,$$

ceea ce conduce la concluzia $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$. $\diamondsuit$

Definiţia 5.2.1 Se numeşte *fascicul de drepte concurente* mulţimea dreptelor din plan care trec printr-un punct M_0, numit vârful fasciculului.

Propoziţia 5.2.5 *Fie d_1, d_2 drepte în plan, $d_1 \cap d_2 = \{M_0\}$, având ecuaţiile $(d_1) : a_1x + b_1y + c_1 = 0$ şi $(d_2) : a_2x + b_2y + c_2 = 0$. Ecuaţia fasciculului de drepte concurente cu vârful într-un punct M_0 este*

$$(d_{\lambda,\mu}) : \lambda F_1(x,y)d_1 + \mu F_2(x,y) = 0, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

unde $F_1(x,y) = a_1x + b_1y + c_1,\ F_2(x,y) = a_2x + b_2y + c_2$.

Demonstraţie: Fie o dreaptă arbitrară d din plan, având ecuaţia

$$(d) : ax + by + c = 0.$$

Dreapta d aparţine fasciculului de vârf M_0 dacă $M_0 \in d$; sistemul următor trebuie să fie compatibil determinat:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \\ ax + by + c = 0 \end{cases}$$

Pe de altă parte, $d_1 \cap d_2 = \{M_0\}$ implică $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$. Atunci determinantul caracteristic $\Delta_c = 0$, adică $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0$. Această egalitate este echivalentă cu faptul că vectorii (a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2), $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ sunt liniar independenţi, adică există $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, nu toţi nuli, astfel încât

$$\alpha(a_1, b_1, c_1) + \beta(a_2, b_2, c_2) + \gamma(a, b, c) = (0, 0, 0).$$

Observăm că în această combinaţie liniară γ nu poate fi nul, deoarece în acest caz am ajunge la concluzia $d_1 = d_2$. Deducem că (a, b, c) este o combinaţie liniară a vectorilor (a_1, b_1, c_1) şi (a_2, b_2, c_2) :

$$\begin{cases} a = \lambda a_1 + \mu a_2 \\ b = \lambda b_1 + \mu b_2 \\ c = \lambda c_1 + \mu c_2 \end{cases}$$

Înlocuind în ecuaţia dreptei d obţinem

$$\lambda(a_1x + b_1y + c_1) + \mu(a_2x + b_2y + c_2) = 0 \quad \diamondsuit$$

Observaţia 5.2.1 Familia de drepte $(d_\lambda) : \ F_1(x, y) + \lambda F_2(x, y) = 0, \ \lambda \in \mathbb{R}$ este mulţimea dreptelor din plan care trec prin punctul M_0 mai puţin dreapta d_2 şi se numeşte *fascicul redus* de drepte concurente cu vârful în M_0.

Definiţia 5.2.2 Se numeşte *fascicul de drepte paralele* de direcţie $\overline{v} \in V_2$ mulţimea dreptelor din plan paralele cu direcţia vectorului liber $\overline{v}$.

Propoziţia 5.2.6 *Ecuaţia fasciculului de drepte paralele de direcţie $\overline{v}$ este*

$$d_1 + \lambda = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

unde d_1 este direcţia vectorului $\overline{v}$.

Demonstraţie: Fie $(d) : ax + by + c = 0$ şi $(d_1) : a_1x + b_1y + c_1 = 0$. Conform Propoziţiei 5.2.4 (ii), $d \parallel d_1 \Leftrightarrow \dfrac{a}{a_1} = \dfrac{b}{b_1} \neq \dfrac{c}{c_1}$.

Fie $\dfrac{a}{a_1} = \dfrac{b}{b_1} = \alpha$. Atunci $a = \alpha a_1,\ b = \alpha b_1$. Înlocuim în ecuaţia dreptei d şi avem

$$(d) : a_1x + b_1y + \frac{c}{\alpha} = 0$$

Fie $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât $\dfrac{c}{\alpha} = c_1 + \lambda$. Obţinem

$$(d) : a_1x + b_1y + c_1 + \lambda = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

sau $d_1 + \lambda = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}$. $\diamondsuit$

5.3 Probleme de distanţe şi unghiuri

Propoziţia 5.3.1 *(i) Distanţa dintre punctele $M_1(x_1, y_1)$ şi $M_2(x_2, y_2)$ este*

$$d(M_1, M_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

(ii) Dacă $\sphericalangle(d_1, d_2) = \alpha$, d_1 şi d_2 fiind două drepte cu coeficienţii unghiulari m_1 şi m_2, atunci avem:

$$\text{tg } \alpha = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1m_2}$$

În plus, avem:

$$d_1 \perp d_2 \ \Leftrightarrow \ m_1m_2 = -1$$

$$d_1 \| d_2 \ \Leftrightarrow \ m_1 = m_2$$

(iii) Fie punctul $M_0(x_0, y_0)$ şi dreapta d de ecuaţie $ax+by+c = 0$. Distanţa de la punctul M_0 la dreapta d se calculează astfel:

$$dist(M_0, d) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

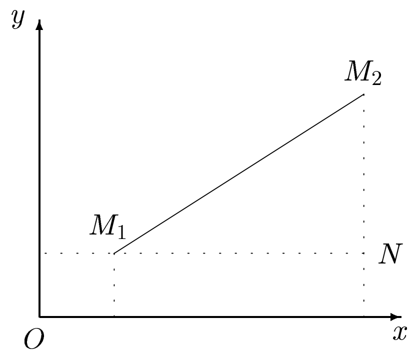
(iv) Fie punctul M care împarte segmentul $[M_1M_2]$ în raportul k. Coordonatele punctului M sunt date de formulele următoare:

$$x_M = \frac{x_1 + kx_2}{1 + k}; \quad y_M = \frac{y_1 + ky_2}{1 + k}$$

(v) Fie $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B), C(x_C, y_C)$. Aria triunghiului ABC este $S_{\triangle ABC} = \dfrac{\varepsilon}{2} \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}$, unde $\varepsilon = 1$ dacă valoarea determinantului este un

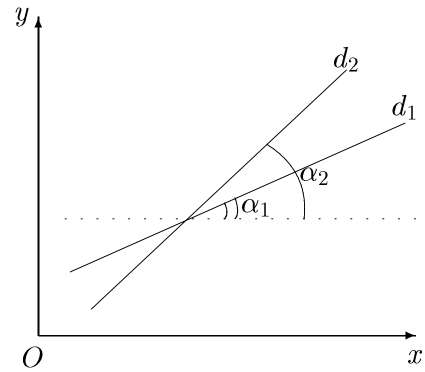
număr pozitiv respectiv $\varepsilon = -1$ dacă valoarea determinantului este un număr negativ.

Demonstraţie: (i) Aplicăm teorema lui Pitagora în $\triangle M_1M_2N$.



(ii) Fie $\alpha_1 = \sphericalangle(d_1, Ox), \alpha_2 = \sphericalangle(d_2, Ox)$. Evident $\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$.
Pe baza unei formule cunoscute din trigonometrie obţinem:

$$\text{tg } \alpha = \text{tg } (\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\text{tg } \alpha_2 - \text{tg } \alpha_1}{1 + \text{tg } \alpha_2 \text{tg } \alpha_1} = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1m_2}$$

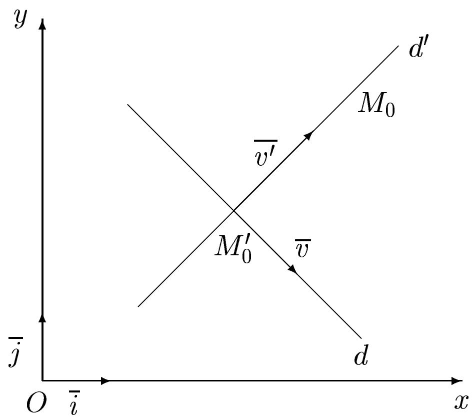


(iii) Avem $d_1 \perp d_2 \;\Leftrightarrow\; \sphericalangle(d_1, d_2) = \dfrac{\pi}{2}$, adică ctg $\sphericalangle(d_1, d_2) = 0$.

Folosind tg $\alpha_1 = m_1$, tg $\alpha_2 = m_2$ şi afirmaţia (ii) vom avea $\dfrac{1 + m_1m_2}{m_2 - m_1} = 0$, ceea ce este echivalent cu $m_1m_2 = -1$.

De asemenea, observăm faptul că dreptele d_1 şi d_2 vor fi paralele dacă şi numai dacă $\alpha_1 = \alpha_2$, ceea ce este echivalent cu condiţia $m_1 = m_2$.

(iv) Fie $\overline{v} = (b, -a)$ vectorul de direcţie al dreptei d; atunci dreapta d' ce trece prin M_0 şi este perpendiculară pe d are vectorul de direcţie $\overline{v'} = (a, b)$.



Fie $M_0' = pr_d M_0$, $M_0'(x_0', y_0')$. Avem
$\overline{M_0'M_0} = (x_0 - x_0')\overline{i} + (y_0 - y_0')\overline{j}$ şi $\overline{M_0'M_0} \cdot \overline{v'} = \|\overline{M_0'M_0}\| \cdot \|\overline{v'}\| \cdot (\pm 1)$.
De aici rezultă

$$a(x_0 - x_0') + b(y_0 - y_0') = \pm dist(M_0, d)\sqrt{a^2 + b^2}$$

$$ax_0 + by_0 - (ax_0' + by_0') = \pm dist(M_0, d)\sqrt{a^2 + b^2}$$

Deoarece $M_0'(x_0', y_0') \in d$, avem $ax_0' + by_0' + c = 0$. Înlocuind în relaţia de mai sus, avem

$$dist(M_0, d) = |\frac{ax_0 + by_0 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}|.$$

O altă demonstraţie: Conform (iii), $m \cdot m' = -1$, deci d' are ecuaţia

$$y - y_0 = -\frac{1}{m}(x - x_0).$$

Fie $\{M_0'\} = d \cap d'$; coordonatele lui M_0' sunt date de soluţia sistemului

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ y - y_0 = -\dfrac{1}{m}(x - x_0) \end{cases}$$

Aici $m = -\dfrac{a}{b}$.

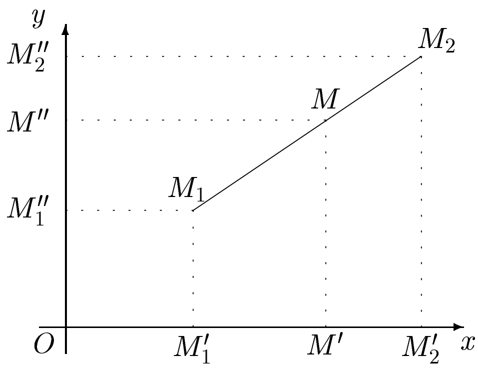
Rezolvând acest sistem obţinem

$$x = \frac{b^2 x_0 - aby_0 - ac}{a^2 + b^2}, \quad y = y_0 - \frac{b(ax_0 + by_0 + c)}{a^2 + b^2},$$

iar distanţa căutată se calculează astfel:

$$(dist(M_0, d))^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \frac{1}{a^2 + b^2}(ax_0 + by_0 + c)^2.$$

(v) Fie punctele $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, $M(x, y)$.



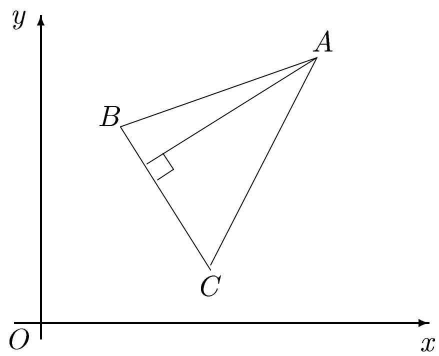
Dacă $\dfrac{\|\overline{M_1M}\|}{\|\overline{MM_2}\|} = k$, avem $\dfrac{\|\overline{M_1'M'}\|}{\|\overline{M'M_2'}\|} = k$ şi $\dfrac{\|\overline{M_1''M''}\|}{\|\overline{M''M_2''}\|} = k$. Putem scrie astfel:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = k; \frac{y - y_1}{y_2 - y} = k$$

şi obţinem

$$\begin{cases} (1+k)x = x_1 + kx_2 \\ (1+k)y = y_1 + ky_2 \end{cases}$$

(vi)



Aria triunghiului ABC se calculează astfel:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} dist(B, C) \cdot dist(A, (BC))$$

Scriem ecuaţia dreptei (BC) :

$$\frac{x - x_B}{x_C - x_B} = \frac{y - y_B}{y_C - y_B}$$

sau, echivalent,

$$(y_C - y_B)x - (x_C - x_B)y - x_B(y_C - y_B) + y_B(x_C - x_B) = 0$$

Acum putem calcula

$$dist(A, (BC)) = \frac{|(y_C - y_B)x_A - (x_C - x_B)y_A - x_B y_C + x_C y_B|}{\sqrt{(y_C - y_B)^2 + (x_C - x_B)^2}}$$

Pe baza afirmaţiei (iv) obţinem

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} \cdot dist(A, (BC)) = \frac{\varepsilon}{2}\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} \diamondsuit$$

Capitolul 6

Conice

6.1 Cercul

Definiţia 6.1.1 Fie $M_0(x_0, y_0)$ un punct fixat şi $R > 0$ fixat. *Cercul* de centru M_0 şi rază R, notat $\mathcal{C}(M_0, R)$, este locul geometric al punctelor din plan situate la distanţa R de punctul M_0.

Teorema 6.1.1 *Ecuaţia carteziană implicită a cercului cu centrul în M_0 şi raza R este*

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

Demonstraţie: Conform definiţiei de mai sus, $M \in \mathcal{C}(M_0, R) \Leftrightarrow d(M_0, M) = R \Leftrightarrow \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = R, \ \forall\, M(x, y) \in \mathcal{C}(M_0, R).\diamondsuit$

Propoziţia 6.1.1 *(i) Ecuaţiile parametrice ale cercului $\mathcal{C}(M_0, R)$ sunt*

$$\begin{cases} x = x_0 + R\cos t \\ y = y_0 + R\sin t \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi)$$

(ii) Ecuaţia vectorială a cercului $\mathcal{C}(M_0, R)$ este

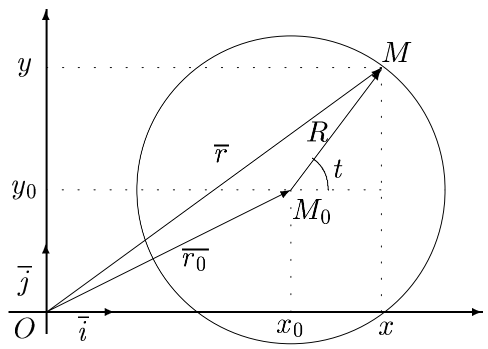
$$\overline{r} = \overline{r}_0 + R(\cos t \cdot \overline{i} + \sin t \cdot \overline{j}), \quad t \in [0, 2\pi),$$

unde $\overrightarrow{OM_0} \in \overline{r}_0$ şi $\overrightarrow{OM} \in \overline{r}$.

(iii) Ecuaţia carteziană generală a cercului $\mathcal{C}(M_0, R)$ este

$$x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0, \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \ a^2 + b^2 - c > 0. \tag{6.1}$$

Demonstraţie:



(i) Dacă $M(x,y) \in \mathcal{C}(M_0,R)$, putem scrie $x-x_0 = R\cos t$, $y-y_0 = R\sin t$.

(ii) În triunghiul OM_0M avem $\overline{r} = \overline{r}_0+\overline{M_0M}$. Înlocuim în această egalitate $\overline{M_0M} = (x-x_0)\overline{i} + (y-y_0)\overline{j}$.

(iii) Ecuaţia dată se scrie astfel:

$$(x+a)^2 + (y+b)^2 = a^2 + b^2 - c$$

Dacă $a^2 + b^2 - c > 0$, există $R > 0$ astfel încât $a^2 + b^2 - c = R^2$. Atunci ecuaţia dată reprezintă ecuaţia cercului cu centrul în $(M_0(-a,-b)$ şi raza $R = \sqrt{a^2+b^2-c})$.$\diamondsuit$

Observaţia 6.1.1 (i) Dacă $a^2+b^2-c=0$, punctul $M_0(-a,-b)$ este singurul punct ale cărui coordonate verifică ecuaţia (6.1). Dacă $a^2+b^2-c<0$, nu există nici un punct cu această proprietate .

(ii) Ecuaţia

$$\alpha(x^2+y^2) + 2\beta x + 2\gamma y + \delta = 0$$

este echivalentă cu ecuaţia (6.1) dacă

$$\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^2 - \frac{\delta}{\alpha} > 0, \quad \text{adică} \quad \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\delta > 0.$$

Propoziţia 6.1.2 *Fie cercul $\mathcal{C}(M_0,R)$ având ecuaţia*

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2$$

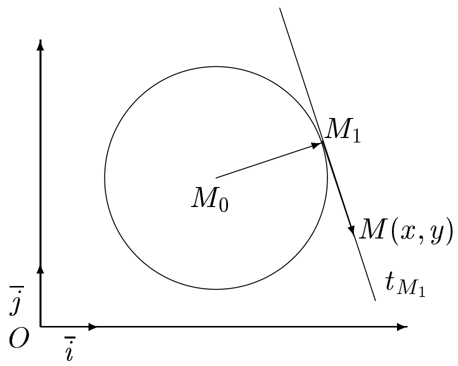
şi fie $M_1(x_1,y_1) \in \mathcal{C}(M_0,R)$.

Ecuaţia tangentei t_{M_1} la cerc în punctul M_1 este

$$(x_1-x_0)(x-x_0) + (y_1-y_0)(y-y_0) = R^2$$

(ecuaţia tangentei scrisă prin dedublare.)

Demonstraţie:



Pentru orice punct $M \in t_{M_1}$, avem $\overrightarrow{M_0M_1} \perp \overrightarrow{M_1M}$ sau $\overrightarrow{M_0M_1} \cdot \overrightarrow{M_1M} = 0$. Înlocuim

$$\overline{M_0M_1} = (x_1 - x_0)\overline{i} + (y_1 - y_0)\overline{j}$$
$$\overline{M_1M} = (x - x_1)\overline{i} + (y - y_1)\overline{j}$$

în egalitatea de mai sus şi avem $(x_1 - x_0)(x - x_1) + (y_1 - y_0)(y - y_1) = 0$.

Putem scrie aceasta sub forma

$$(x_1 - x_0)(x - x_0 + x_0 - x_1) + (y_1 - y_0)(y - y_0 + y_0 - y_1) = 0$$

sau echivalent

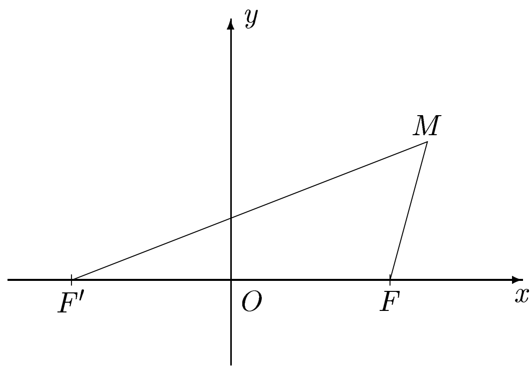
$$(x_1 - x_0)(x - x_0) - (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)(y - y_0) - (y_1 - y_0)^2 = 0.$$

Deoarece $M_1 \in \mathcal{C}(M_0, R)$, avem $(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 = R^2$ şi atunci obţinem $(x_1 - x_0)(x - x_0) + (y_1 - y_0)(y - y_0) = R^2$.$\diamondsuit$

6.2 Conice pe ecuaţia redusă

Definiţia 6.2.1 *Elipsa* $\mathcal{E}$ este locul geometric al punctelor din plan a căror sumă a distanţelor la două puncte fixe numite *focare* este constantă.

Vom nota focarele cu F şi F'. Alegem un reper cartezian în felul următor:
axa Ox este dreapta determinată de focarele F, F'
axa Oy este mediatoarea segmentului FF'.



Notăm $\|\overline{FF'}\| = 2c = \text{constant}$, deci $F(c,0)$ şi $F'(-c,0)$.

Fie $M(x,y)$ un punct arbitrar de pe elipsă. Orice astfel de punct verifică

$$\|\overline{MF}\| + \|\overline{MF'}\| = 2a = \text{constant} \tag{6.2}$$

Avem $\|\overline{MF}\| = \sqrt{(x-c)^2+y^2}$ şi $\|\overline{MF'}\| = \sqrt{(x+c)^2+y^2}$. Înlocuind în (6.2) obţinem

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2} + \sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a$$

Din $\sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2+y^2}$ prin ridicare la pătrat rezultă

$$x^2+2cx+c^2+y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2$$

Ridicăm din nou la pătrat egalitatea $cx - a^2 = -a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$ şi vom avea

$$c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2$$

sau, echivalent,

$$(a^2-c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2-c^2)$$

În $\triangle MFF'$ avem $\|\overline{MF}\| + \|\overline{MF'}\| > \|\overline{FF'}\|$ deci $a > c$. Putem nota $a^2 - c^2 = b^2$ şi obţinem

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

ecuaţie care se poate scrie sub forma

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

În acest fel, am demonstrat teorema următoare:

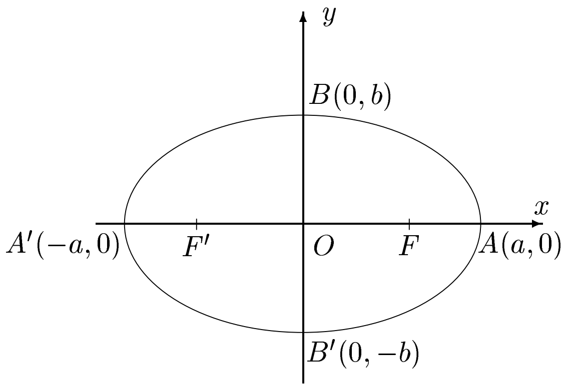
Teorema 6.2.1 *Ecuaţia canonică (redusă) a elipsei este*

$$(\mathcal{E}) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \tag{6.3}$$

Observaţia 6.2.1 Dacă $M(x, y) \in \mathcal{E}$, atunci $M_1(-x, y)$, $M_2(x, -y)$, $M_3(-x, -y) \in \mathcal{E}$.

În concluzie, Ox şi Oy sunt axe de simetrie ale elipsei, iar originea este centru de simetrie al elipsei.

Reprezentarea geometrică:



Punctele A, A, B, B' se numesc vârfurile elipsei. AA' este axa mare a elipsei, iar BB' este axa mică. a, b se numesc semiaxele elipsei.

Numărul $e = \frac{c}{a}$ se numeşte *excentricitatea* elipsei. Evident $e < 1$. Excentricitatea elipsei măsoară gradul de "turtire" a elipsei.

Observaţia 6.2.2 Elipsa $\mathcal{E}$ având ecuaţia canonică (6.3) are ecuaţiile parametrice

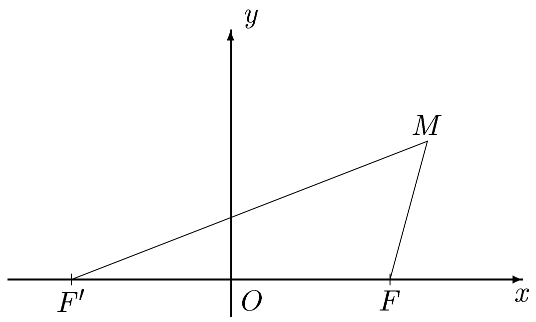
$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi)$$

Ecuaţia explicită a elipsei $\mathcal{E}$ este

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}, x \in [-a, a]$$

Definiţia 6.2.2 *Hiperbola* $\mathcal{H}$ este locul geometric al punctelor din plan a căror diferenţă a distanţelor la două puncte fixe numite *focare* este constantă.

Notăm focarele hiperbolei cu F şi F'. Alegem axele reperului la fel ca în cazul elipsei.



Notăm $\|\overline{FF'}\| = 2c =$ constant, deci $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$. Fie $M(x, y) \in \mathcal{H}$.
Notăm $|\ \|\overline{MF}\| - \|\overline{MF'}\|\ | = 2a =$ constant.

Înlocuim $\|\overline{MF}\| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$ şi $\|\overline{MF'}\| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$ şi avem

$$|\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}| = 2a$$

Cazul I.

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a + \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

Ridicăm la pătrat şi avem

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + x^2 + 2cx + c^2 + y^2$$

$$-cx - a^2 = a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

Ridicăm din nou la pătrat:

$$c^2x^2 + 2a^2cx + a^4 = a^2x^2 + 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2$$

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

În $\triangle MFF'$ avem $|\|\overline{MF}\| - \|\overline{MF'}\|| < \|\overline{FF'}\|$, deci $a < c$. Putem nota $b^2 = c^2 - a^2$ şi ecuaţia de mai sus se scrie sub forma

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

sau, echivalent,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

Cazul II.

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Se procedează în acelaşi fel.

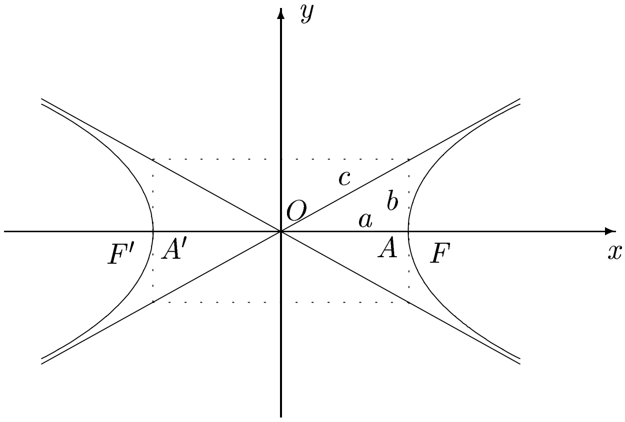
Am demonstrat astfel teorema următoare:

Teorema 6.2.2 *Ecuaţia canonică (redusă) a hiperbolei este*

$$(\mathcal{H}) : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

Observaţia 6.2.3 La fel ca în cazul elipsei, axele Ox şi Oy sunt axe de simetrie, iar originea este centru de simetrie al hiperbolei.

Reprezentarea geometrică:



Dreptele de ecuaţii $y = \pm\frac{b}{a}x$ sunt asimptotele hiperbolei. Punctele A, A' se numesc vârfuri, iar FF' este axa transversală.

Prin definiţie, *excentricitatea* hiperbolei este $e = \frac{c}{a}$. Evident $e > 1$. Excentricitatea măsoară "abaterea" ramurilor hiperbolei de la dreptele de ecuaţii $x = \pm a$.

Observaţia 6.2.4 (i) Ecuaţiile parametrice ale hiperbolei $\mathcal{H}$ sunt

$$\begin{cases} x = b \operatorname{sh} t \\ y = \pm a \operatorname{ch} t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

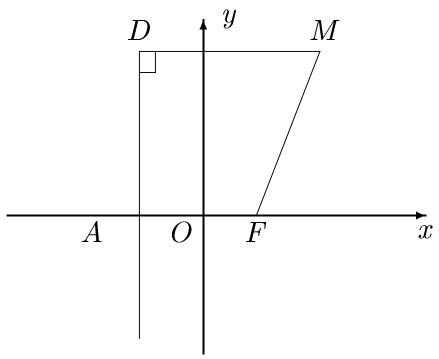
Ecuaţia explicită a hiperbolei $\mathcal{H}$ este

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}, x \in (-\infty, -a] \cup [a, +\infty)$$

(ii) Dacă $a = b, \mathcal{H}$ se numeşte hiperbolă echilateră.

Definiţia 6.2.3 *Parabola* $\mathcal{P}$ este locul geometric al punctelor din plan situate la aceeaşi distanţă faţă de o dreaptă fixă D numită *dreaptă directoare* şi de un punct fix F numit *focar.*

Alegem un reper cartezian astfel:
axa Ox trece prin F şi este perpendiculară pe D în punctul A
axa Oy este mediatoarea segmentului AF.



Notăm $dist(F,D) = p$, unde $p > 0, p =$ constant. Observăm că $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ şi $(D) : x = -\frac{p}{2}$.

Fie $M(x,y)$ un punct arbitrar de pe parabolă; putem scrie

$$dist(M,F) = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2},\ dist(M,D) = \left|x + \frac{p}{2}\right|$$

Din Definiţia 6.2.3 obţinem

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \left|x + \frac{p}{2}\right|$$

Prin ridicare la pătrat rezultă

$$x^2 + \frac{p^2}{4} - px + y^2 = x^2 + \frac{p^2}{4} + px$$

$$y^2 = 2px$$

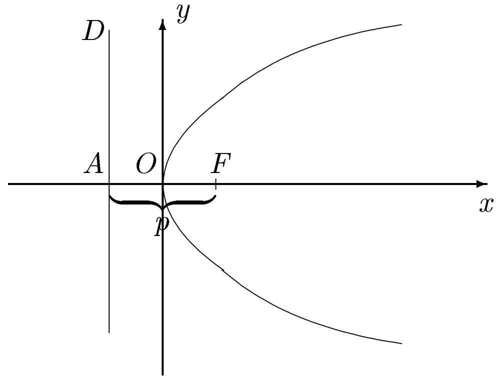
Am demonstrat astfel următoarea teoremă:

Teorema 6.2.3 *Ecuaţia canonică (redusă) a parabolei este*

$$(\mathcal{P}) : y^2 = 2px$$

Observaţia 6.2.5 Dacă $M(x,y) \in P$, atunci $M_1(x,-y) \in P$; axa Ox este axă de simetrie a parabolei.

Reprezentarea geometrică:



Numărul p se numeşte *parametrul* parabolei. Ox este axa parabolei, iar Oy este tangenta la vârf.

Observaţia 6.2.6 Ecuaţiile parametrice ale parabolei $\mathcal{P}$ sunt

$$\begin{cases} x = \dfrac{t^2}{2p} \\ y = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

iar ecuaţia explicită este

$$y = \pm\sqrt{2px}, x \geq 0$$

Propoziţia 6.2.1 *Ecuaţiile tangentelor la $\mathcal{E}$, $\mathcal{H}$, $\mathcal{P}$ într-un punct dat $M_0(x_0, y_0)$ se scriu prin dedublare:*

$$(t_{\mathcal{E},M_0}) : \frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} - 1 = 0$$
$$(t_{\mathcal{H},M_0}) : \frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} - 1 = 0$$
$$(t_{\mathcal{P},M_0}) : yy_0 = p(x + x_0)$$

Fără demonstraţie.

6.3 Conice pe ecuaţia generală

Definiţia 6.3.1 Se numeşte *conică* mulţimea

$$\Gamma = \{M(x, y) \in E_2 |\ a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0\}$$

unde $a_{ij} \in \mathbb{R}, \ i,j \in \{1,2,3\}$.

Ecuaţia

$$(\Gamma) : a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \qquad (6.4)$$

se numeşte *ecuaţia generală a conicei.*

Dacă $a_{11} = a_{12} = a_{22} = 0$, ecuaţia (6.4) devine $2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$, care reprezintă ecuaţia unei drepte (dacă $a_{13}^2 + a_{23}^2 > 0$); dreptele le numim curbe algebrice de gradul I.

Dacă $a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 > 0$, ecuaţia (6.4) este de gradul al II-lea; conicele le numim curbe algebrice de gradul al II-lea.

Exemple: (i) Dacă $a_{11} = \dfrac{1}{a^2}$, $a_{12} = 0$, $a_{22} = \dfrac{1}{b^2}$, $a_{13} = a_{23} = 0$, $a_{33} = -1$, ecuaţia (6.4) este ecuaţia canonică a elipsei de semiaxe a, b.

(ii) Dacă $a_{11} = \dfrac{1}{a^2}$, $a_{22} = -\dfrac{1}{b^2}$, $a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0$, $a_{33} = -1$, Γ este o hiperbolă.

(iii) Dacă $a_{11} = a_{12} = a_{23} = a_{33} = 0$, $a_{22} = 1$, $a_{13} = -p$, Γ este o parabolă.

(iv) Putem avea, de asemenea, una din următoarele situaţii:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \quad \text{drepte concurente}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0 \quad \text{un punct}$$

$$x^2 - k^2 = 0 \quad \text{drepte paralele}$$

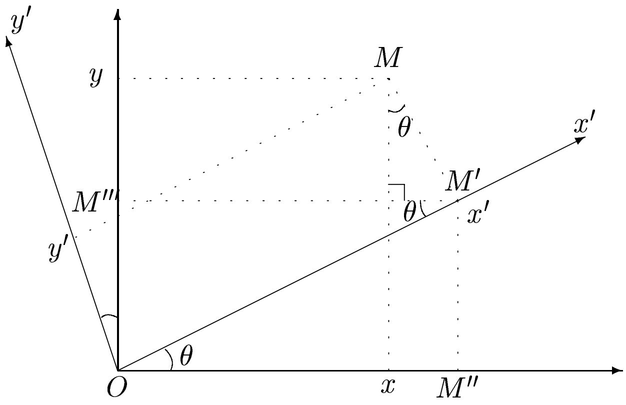
$$x^2 = 0 \quad \text{drepte confundate}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0 \quad \text{mulţimea vidă}$$

În acest paragraf vom arăta că *orice conică este congruentă cu una din mulţimile de mai sus.* Pentru a demonstra aceasta, vom introduce două metode de reducere a ecuaţiei generale a unei conice la forma canonică: metoda rototranslaţiei şi metoda valorilor proprii.

Metoda rototranslaţiei

Vom presupune că $a_{12} \neq 0$. Efectuăm o rotaţie de unghi θ. În raport cu reperul cartezian ales iniţial, coordonatele se notează cu x şi y, iar după efectuarea rotaţiei coordonatele vor fi notate cu x' şi y'.



Fie $M' = pr_{Ox'}M$, $M'' = pr_{Ox}M'$ şi $M''' = pr_{Oy}M'$. Exprimăm x şi y în funcţie de x', y' şi θ. Din

$$x = \|\overline{OM''}\| - \|\overline{MM'}\| \cdot \sin\theta, \|\overline{OM''}\| = x'\cos\theta, \|\overline{MM'}\| = y'$$

obţinem $x = x'\cos\theta - y'\sin\theta$. În acelaşi mod, din

$$y = \|\overline{OM'''}\| + \|\overline{MM'}\|\cos\theta, \|\overline{OM'''}\| = x'\sin\theta$$

găsim $y = x'\sin\theta + y'\cos\theta$.

Am obţinut ecuaţiile rotaţiei de unghi θ :

$$\begin{cases} x = x'\cos\theta - y'\sin\theta \\ y = x'\sin\theta + y'\cos\theta \end{cases} \tag{6.5}$$

În continuare, vom determina unghiul de rotaţie θ astfel încât în ecuaţia obţinută $x'y'$ să aibă coeficientul nul. Înlocuim în ecuaţia (6.4) x şi y din formulele (6.5) şi avem:

$$a_{11}(x'\cos\theta - y'\sin\theta)^2 + 2a_{12}(x'\cos\theta - y'\sin\theta)(x'\sin\theta + y'\cos\theta) +$$

$$+a_{22}(x'\sin\theta + y'\cos\theta)^2 + 2a_{13}(x'\cos\theta - y'\sin\theta) + 2a_{23}(x'\sin\theta + y'\cos\theta) + a_{33} = 0$$

$$(a_{11}\cos^2\theta + 2a_{12}\cos\theta\sin\theta + a_{22}\sin^2\theta)x'^2 +$$

$$+(-2a_{11}\cos\theta\sin\theta + 2a_{12}\cos^2\theta - 2a_{12}\sin^2\theta + 2a_{22}\sin\theta\cos\theta)x'y' +$$

$$+(a_{11}\sin^2\theta - 2a_{12}\sin\theta\cos\theta + a_{22}\cos^2\theta)y'^2 +$$

$$+2(a_{13}\cos\theta + a_{23}\sin\theta)x' + 2(-a_{13}\sin\theta + a_{23}\cos\theta)y' + a_{33} = 0$$

Punem condiţia $a'_{12} = 0$:

$$-2a_{11}\cos\theta\sin\theta + 2a_{12}(\cos^2\theta - \sin^2\theta) + 2a_{22}\sin\theta\cos\theta = 0$$

sau, echivalent, $-a_{11}\sin 2\theta + 2a_{12}\cos 2\theta + a_{22}\sin 2\theta = 0$.

În acest fel am obţinut formula unghiului de rotaţie:

$$\text{ctg } 2\theta = \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}} \tag{6.6}$$

Ecuaţia (6.4) devine

$$a'_{11}x'^2 + a'_{22}y'^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a_{33} = 0 \tag{6.7}$$

Vom analiza mai multe cazuri, în funcţie de coeficienţii acestei ecuaţii.

Cazul I. Dacă $a'_{11} \neq 0$ şi $a'_{22} \neq 0$, e suficient să formăm pătrate perfecte:

$$a'_{11}\left(x' + \frac{a'_{13}}{a'_{11}}\right)^2 + a'_{22}\left(y' + \frac{a'_{23}}{a'_{22}}\right)^2 + a'_{33} = 0$$

Aici am notat $a'_{33} = a_{33} - \dfrac{{a'_{13}}^2}{a'_{11}} - \dfrac{{a'_{23}}^2}{a'_{22}}$.

Efectuăm acum translaţia

$$\begin{cases} x'' = x' + \dfrac{a'_{13}}{a'_{11}} \\ y'' = y' + \dfrac{a'_{23}}{a'_{22}} \end{cases}$$

şi obţinem $a'_{11}x''^2 + a'_{22}y''^2 + a'_{33} = 0$.

Această ecuaţie poate reprezenta o elipsă, hiperbolă, $\emptyset$, un punct sau două drepte concurente.

Exemplu: Fie conica $(\Gamma) : x^2 + xy + y^2 + x - y = 0$.

Determinăm unghiul de rotaţie. Din formula (6.6) avem ctg $2\theta = 0$, deci $2\theta = \dfrac{\pi}{2}$ şi $\theta = \dfrac{\pi}{4}$. Scriem ecuaţiile rotaţiei:

$$\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(x' - y') \\ y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(x' + y') \end{cases}$$

Înlocuind în ecuaţia iniţială a conicei (Γ) obţinem

$$\frac{1}{2}(x'^2 - 2x'y' + y'^2) + \frac{1}{2}(x'^2 - y'^2) + \frac{1}{2}(x'^2 + 2x'y' + y'^2) + \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y') - \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y') = 0$$

$$3x'^2 + y'^2 - 2\sqrt{2}y' = 0$$

Formăm acum pătrate perfecte:

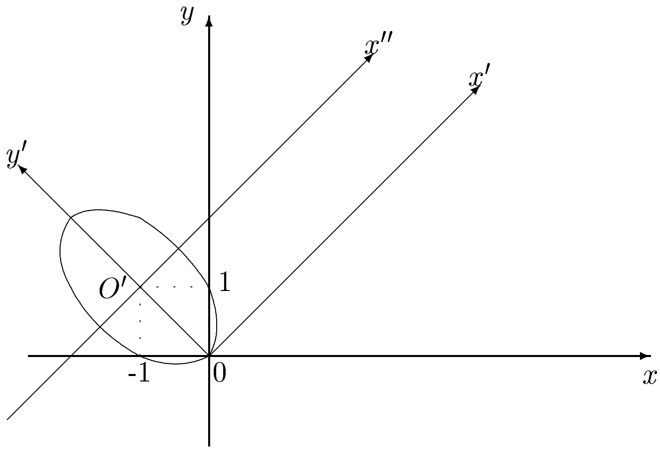
$$3x'^2 + (y' - \sqrt{2})^2 - 2 = 0$$

Efectuăm translaţia de ecuaţii

$$\begin{cases} x'' = x' \\ y'' = y' - \sqrt{2} \end{cases}$$

şi obţinem $3x''^2 + y''^2 - 2 = 0$ sau $\dfrac{x''^2}{\left(\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)^2} + \dfrac{y''^2}{(\sqrt{2})^2} - 1 = 0.$

Deducem că Γ este o elipsă, având semiaxele $a = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$, $b = \sqrt{2}$.



Cazul II. Presupunem că $a'_{11} \neq 0$ şi $a'_{22} = 0$. Ecuaţia (6.7) devine

$$a'_{11}x'^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a_{33} = 0$$

sau, echivalent,

$$a'_{11}\left(x' + \frac{a'_{13}}{a'_{11}}\right)^2 + 2a'_{23}\left(y' + \frac{a_{33}}{2a'_{23}} - \frac{a'^2_{13}}{2a'_{11}a'_{23}}\right) = 0$$

Efectuăm translaţia de ecuaţii

$$\begin{cases} x'' = x' + \dfrac{a'_{13}}{a'_{11}} \\ y'' = y' + \dfrac{a_{33}}{a'_{23}} - \dfrac{(a'_{13})^2}{2a'_{11}a'_{23}} \end{cases}$$

şi obţinem

$$a'_{11}(x'')^2 + 2a'_{23}y'' = 0$$

Aceasta poate fi ecuaţia unei parabole, a două drepte paralele, drepte confundate sau $\emptyset$.

Exemplu: Fie conica $(\Gamma) : 4x^2 - 4xy + y^2 - 2x - 4y + 10 = 0$. Determinăm unghiul de rotaţie din ecuaţia $\text{ctg } 2\theta = -\dfrac{3}{4}$. Notăm $\text{tg } \theta = t$ şi obţinem ecuaţia $\dfrac{1-t^2}{2t} = -\dfrac{3}{4}$, având soluţiile $t_1 = 2$, $t_2 = -\dfrac{1}{2}$. Alegem $\text{tg } \theta = 2$ şi obţinem

$$\sin\theta = \frac{\text{tg } \theta}{\sqrt{1 + \text{tg }^2\theta}} = \frac{2}{\sqrt{5}}, \ \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \text{tg }^2\theta}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Ecuaţiile rotaţiei vor fi

$$\begin{cases} x = \dfrac{x' - 2y'}{\sqrt{5}} \\ y = \dfrac{2x' + y'}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

Înlocuind x şi y în ecuaţia curbei Γ vom avea

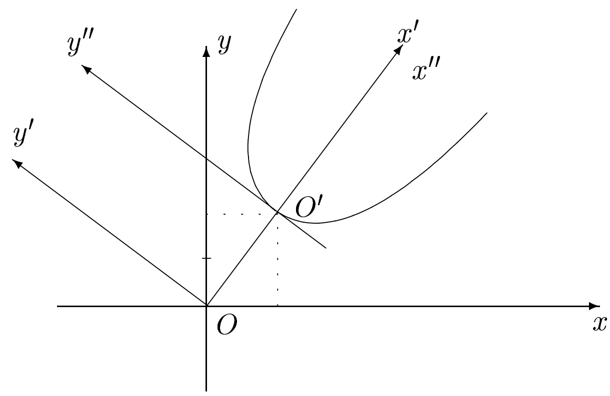
$$\frac{4}{5}(x'-2y')^2 - \frac{4}{5}(x'-2y')(2x'+y') + \frac{(2x'+y')^2}{5} - \frac{2}{\sqrt{5}}(x'-2y') - \frac{4}{\sqrt{5}}(2x'+y') + 10 = 0$$

După efectuarea calculelor obţinem $5y'^2 - 2\sqrt{5}(x' - \sqrt{5}) = 0$. Efectuăm translaţia de ecuaţii:

$$\begin{cases} x'' = x' - \sqrt{5} \\ y'' = y' \end{cases}$$

şi obţinem $5(y'')^2 - 2\sqrt{5}x'' = 0$ sau $(y'')^2 = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}x''$.

În concluzie, Γ este o parabolă având parametrul $p = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$.



Cazul III. Dacă $a'_{11} = 0$ şi $a'_{22} \neq 0$ procedăm la fel ca în cazul II.

Cazul IV. Presupunem că $a'_{11} = 0 = a'_{22}$. În acelaşi timp avem $a'_{12} = 0$. Deducem că Γ este o dreaptă.

Observăm că în cazul $a_{12} = 0$ rotaţia nu este necesară.

În continuare vom prezenta o metodă de clasificare a conicelor cu ajutorul aşa-numiţilor invarianţi. Pentru aceasta vom introduce unele notaţii.

Fie conica Γ având ecuaţia generală (6.4). Notăm

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$I = a_{11} + a_{22} = trA$$

$$\delta = \det A = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Propoziţia 6.3.1 *Numerele I, δ şi Δ sunt invariante faţă de rotaţii şi translaţii.*

Definiţia 6.3.2 Numerele I, δ şi Δ se numesc *invarianţii conicei.*

Cu ajutorul invarianţilor se pot obţine condiţii necesare şi suficiente de existenţă a centrului de simetrie al unei conice.

Propoziţia 6.3.2 *$C(x_0, y_0)$ este centru de simetrie al conicei Γ dacă şi numai dacă (x_0, y_0) este soluţie a sistemului*

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0 \\ a_{12}x + a_{22}y + a_{23} = 0 \end{cases}$$

Demonstraţie: Efectuăm o translaţie în punctul $C(x_0, y_0)$ având ecuaţiile:

$$\begin{cases} x = x_0 + X \\ y = y_0 + Y \end{cases}$$

Ecuaţia (6.4) devine

$$a_{11}(x_0 + X)^2 + 2a_{12}(x_0 + X)(y_0 + Y) + a_{22}(y_0 + Y)^2 +$$

$$+2a_{13}(x_0 + X) + 2a_{23}(y_0 + Y) + a_{33} = 0$$

$$a_{11}X^2 + 2a_{12}XY + a_{22}Y^2 + (2a_{11}x_0 + 2a_{12}y_0 + 2a_{13})X + (2a_{12}x_0 + 2a_{22}y_0 + 2a_{23})Y +$$

$$+a_{11}x_0^2 + 2a_{12}x_0y_0 + a_{22}y_0^2 + 2a_{13}x_0 + 2a_{23}y_0 + a_{33} = 0$$

$$\overline{a}_{11}X^2 + 2\overline{a}_{12}XY + \overline{a}_{22}Y^2 + 2\overline{a}_{13}X + 2\overline{a}_{23}Y + \overline{a}_{33} = 0$$

$C(x_0, y_0)$ este centru de simetrie al lui Γ dacă şi numai dacă pentru orice punct $M(X, Y) \in \Gamma$ avem $M'(-X, -Y) \in \Gamma$. Aceasta înseamnă că au loc simultan următoarele egalităţi:

$$\begin{cases} \overline{a}_{11}X^2 + 2\overline{a}_{12}XY + \overline{a}_{22}Y^2 + 2\overline{a}_{13}X + 2\overline{a}_{23}Y + \overline{a}_{33} = 0 \\ \overline{a}_{11}X^2 + 2\overline{a}_{12}XY + \overline{a}_{22}Y^2 - 2\overline{a}_{13}X - 2\overline{a}_{23}Y + \overline{a}_{33} = 0 \end{cases}$$

Scădem cele două egalităţi şi obţinem $\overline{a}_{13}X + \overline{a}_{23}Y = 0, \forall M(X, Y) \in \Gamma$. Avem $\overline{a}_{13} = 0 = \overline{a}_{23}$, adică (x_0, y_0) este soluţie a sistemului

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0 \\ a_{12}x + a_{22}y + a_{23} = 0 \end{cases} \qquad \diamondsuit$$

Observaţia 6.3.1 Conica Γ are centru de simetrie (vom spune "Γ are centru") unic dacă şi numai dacă $\delta \neq 0$.

Propoziţia 6.3.3 *Fie Γ o conică astfel încât există şi este unic centrul ei, $C(x_0, y_0)$. Cu notaţiile de mai sus, avem $\overline{a}_{33} = \dfrac{\Delta}{\delta}$.*

Demonstraţie: În Propoziţia 6.3.2 am obţinut

$$\overline{a}_{33} = a_{11}x_0^2 + 2a_{12}x_0y_0 + a_{22}y_0^2 + 2a_{13}x_0 + 2a_{23}y_0 + a_{33}$$

egalitate care se mai poate scrie sub forma

$$\overline{a}_{33} = (a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13})x_0 + (a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23})y_0 + a_{13}x_0 + a_{23}y_0 + a_{33}$$

Dacă punctul $C(x_0, y_0)$ este centrul unic al conicei Γ, atunci avem:

$$\begin{cases} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13} = 0 \\ a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23} = 0 \\ a_{13}x_0 + a_{23}y_0 + a_{33} = \overline{a}_{33} \end{cases}$$

Acest sistem este compatibil determinat (necunoscutele fiind x_0, y_0), deci $d_p = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = \delta$ şi $d_c = 0$ adică

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} - \overline{a}_{33} \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \Delta + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{12} & a_{22} & 0 \\ a_{13} & a_{23} & -\overline{a}_{33} \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \Delta - \delta\overline{a}_{33} = 0$$

de unde obţinem $\overline{a}_{33} = \dfrac{\Delta}{\delta}$.$\diamondsuit$

În clasificarea conicelor cu ajutorul invarianţilor Δ, δ şi I, se spune că Δ defineşte *natura conicei*: dacă $\Delta \neq 0$ conica se numeşte nedegenerată, iar dacă $\Delta = 0$ conica este degenerată.

Invariantul δ defineşte *genul conicei*: $\delta > 0$ corespunde genului eliptic, $\delta < 0$ celui hiperbolic iar $\delta = 0$ celui parabolic.

Rezultatele anterioare pot fi sintetizate în tabelul următor:

Natura	Genul	Felul conicei	Ecuaţia canonică
$\Delta \neq 0$ conică nedegenerată	$\delta > 0$ eliptic	$I \cdot \Delta < 0$ elipsă reală	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
		$I \cdot \Delta > 0$ $\emptyset$ (elipsă imaginară)	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$
	$\delta < 0$ hiperbolic	hiperbolă	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
	$\delta = 0$ parabolic	parabolă	$y^2 = 2px$
$\Delta = 0$ conică degenerată	$\delta > 0$ eliptic	două drepte imaginare concurente într-un punct real	$x^2 + \lambda y^2 = 0$, $\lambda > 0$
	$\delta < 0$ hiperbolic	două drepte concurente	$x^2 - \lambda y^2 = 0$, $\lambda > 0$
	$\delta = 0$ parabolic	două drepte paralele (distincte sau confundate) sau $\emptyset$	$x^2 + \lambda = 0$ ($\lambda < 0$ sau $\lambda = 0$ sau $\lambda > 0$)

Metoda valorilor proprii

Rotaţia sistemului de axe Oxy se poate face folosind metoda valorilor proprii (transformări ortogonale) de reducere a formelor pătratice la forma canonică.

Fie $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $h(x,y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$, $a_{12} \neq 0$, (altfel rotaţia nu e necesară) forma pătratică asociată conicei dată prin ecuaţia (6.4).

Matriceal, putem scrie

$$h(x,y) = X^t \cdot A \cdot X,$$

unde $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, iar $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$.

Folosim, în continuare, notaţiile

$$I = a_{11} + a_{22} = trA \quad \text{şi} \quad \delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = \det A.$$

Ecuaţia caracteristică a matricei A este

$$\det(A - \lambda I_2) = 0 \text{ sau } \lambda^2 - I\lambda + \delta = 0,$$

având rădăcinile reale λ_1, λ_2 - valorile proprii ale matricei A.

Dacă $\lambda_1 = \lambda_2$, atunci $I^2 - 4\delta = 0$ sau, echivalent, $(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2 = 0$, de unde obţinem $a_{11} = a_{22}$ şi $a_{12} = 0$, contradicţie.

În concluzie, avem $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Alegem doi vectori proprii $\overline{v}_1$ şi $\overline{v}_2$ corespunzători acestor valori proprii.

Fie $\overline{e}_1 = \dfrac{\overline{v}_1}{\|\overline{v}_1\|} = a_1\overline{i} + b_1\overline{j}$ şi $\overline{e}_2 = \dfrac{\overline{v}_2}{\|\overline{v}_2\|} = a_2\overline{i} + b_2\overline{j}$ astfel încât matricea C asociată schimbării de baze $\{\overline{i}, \overline{j}\} \mapsto \{\overline{e}_1, \overline{e}_2\}$ să verifice condiţia $\det C = 1$. Versorii proprii $\overline{e}_1$ şi $\overline{e}_2$ dau direcţiile noilor axe Ox' şi Oy'.

Rotaţia definită prin

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

reduce forma pătratică h la forma canonică $\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2$, iar ecuaţia conicei devine

$$\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a_{33} = 0$$

Scriem această ecuaţie sub forma

$$\lambda_1(x' + a_1)^2 + \lambda_2(y' + a_2)^2 + a'_{33} = 0$$

şi efectuăm translaţia de ecuaţii

$$\begin{cases} x'' = x' + a_1 \\ y'' = y' + a_2 \end{cases}$$

Ecuaţia conicei va fi

$$\lambda_1(x'')^2 + \lambda_2(y'')^2 + a'_{33} = 0$$

Aici am folosit notaţiile $a_1 = \dfrac{a'_{13}}{\lambda_1}$, $\quad a_2 = \dfrac{a'_{23}}{\lambda_2}$, $\quad a'_{33} = a_{33} - \dfrac{(a'_{13})^2}{\lambda_1} - \dfrac{(a'_{23})^2}{\lambda_2}$.

Observăm că şi în cazul acestei metode formula unghiului de rotaţie este dată de relaţia (6.6):

dacă $\overline{e}_1 = a_1\overline{i} + b_1\overline{j} = \cos\theta \cdot \overline{i} + \sin\theta \cdot \overline{j}$, atunci $\overline{e}_2 = -\sin\theta \cdot \overline{i} + \cos\theta \cdot \overline{j}$ şi $\operatorname{ctg}\, \theta = \dfrac{a_1}{b_1}$.

$\overline{e}_1$ şi $\overline{e}_2$ fiind vectori proprii ai matricei A, a_1, b_1 verifică sistemul

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda_1)a_1 + a_{12}b_1 = 0 \\ a_{12}a_1 + (a_{22} - \lambda_1)b_1 = 0 \end{cases}$$

de unde obţinem:

$$\operatorname{ctg}\, \theta = \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_{12}}{-a_{11} + \lambda_1} = \frac{-a_{22} + \lambda_1}{a_{12}}$$

$$\operatorname{ctg}\, 2\theta = \frac{\operatorname{ctg}^2\theta - 1}{2\operatorname{ctg}\, \theta} = \frac{a_{12}^2 - (\lambda_1 - a_{11})^2}{2a_{12}(\lambda_1 - a_{11})}$$

λ_1 este rădăcină a ecuaţiei caracteristice, aşa încât avem:

$$\lambda_1^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda_1 + a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0.$$

Înlocuim în relaţia de mai sus şi obţinem:

$$\operatorname{ctg}\, 2\theta = \frac{a_{12}^2 - a_{11}^2 + 2\lambda a_{11} - \lambda_1^2}{2a_{12}(\lambda_1 - a_{11})} = \frac{(a_{11} - a_{22})\lambda_1 + a_{11}a_{22} - a_{11}^2}{2a_{12}(\lambda_1 - a_{11})} = \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}}$$

Deducem că $a'_{33} = \dfrac{\Delta}{\delta}$.

Exemplu: Să aplicăm această metodă conicei

$$(\Gamma) : 3x^2 - 4xy - 2x + 4y - 3 = 0.$$

În acest caz, $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$, iar polinomul caracteristic asociat

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = (3 - \lambda)(-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 3\lambda - 4$$

are rădăcinile $\lambda_1 = -1$ şi $\lambda_2 = 4$.

Pentru $\lambda_1 = -1$ sistemul vectorilor proprii este

$$\begin{cases} 4\alpha - 2\beta = 0 \\ -2\alpha + \beta = 0 \end{cases}$$

cu soluţia generală $(t, 2t)$, $t \in \mathbb{R}$; alegem $\overline{v}_1 = \overline{i} + 2\overline{j}$ şi $\overline{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\overline{i} + \frac{2}{\sqrt{5}}\overline{j}$.
Pentru $\lambda_2 = 4$ obţinem versorul $\overline{e}_1 = -\frac{2}{\sqrt{5}}\overline{i} + \frac{1}{\sqrt{5}}\overline{j}$.

Rotaţia va avea ecuaţia

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

adică

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{5}}x' - \frac{2}{\sqrt{5}}y' \\ y = \frac{2}{\sqrt{5}}x' + \frac{1}{\sqrt{5}}y' \end{cases}$$

iar ecuaţia conicei devine $(x'')^2 - 4(y'')^2 + 2 = 0$, forma sa canonică fiind

$$-\frac{(x'')^2}{(\sqrt{2})^2} + \frac{(y'')^2}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} - 1 = 0$$

Capitolul 7

Planul şi dreapta în spaţiu

7.1 Preliminarii

Fie E_3 spaţiul punctual euclidian şi V_3 spaţiul vectorilor liberi din E_3. Fie $O \in E_3$ un punct fixat, numit origine; fie $B = \{\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$ o bază ortonormată în spaţiul vectorial V_3. $R = \{O; \overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$ este un reper cartezian ortonormat în spaţiu. Dacă $M \in E_3$ este un punct arbitrar iar $\overline{r}_M = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}$ este vectorul său de poziţie, notăm $M(x, y, z)$ şi numim x, y, z coordonatele carteziene ale lui M în reperul R.

Dacă $M_1(x_1, y_1, z_1)$ şi $M_2(x_2, y_2, z_2)$, atunci

$$\overline{M_1M_2} = \overline{r}_{M_2} - \overline{r}_{M_1} = (x_2 - x_1)\overline{i} + (y_2 - y_1)\overline{j} + (z_2 - z_1)\overline{k}.$$

Propoziţia 7.1.1 *(i) Distanţa dintre punctele M_1 şi M_2 se calculează astfel:*

$$dist(M_1, M_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

(ii) Dacă M împarte segmentul $[M_1M_2]$ într-un raport dat λ, atunci

$$x_M = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y_M = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z_M = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}.$$

Demonstraţie: (i) Utilizăm $dist(M_1, M_2) = \|\overrightarrow{M_1M_2}\|$ şi reprezentarea lui $\overrightarrow{M_1M_2}$ în baza B.

(ii) Dacă $\dfrac{\|\overline{M_1M}\|}{\|\overline{MM_2}\|} = \lambda$, atunci avem

$$\overline{r}_M = \frac{1}{1 + \lambda}(\overline{r}_{M_1} + \lambda \overline{r}_{M_2})$$

Din $\overline{r}_{M_1} = x_1\overline{i} + y_1\overline{j} + z_1\overline{k}$, $\overline{r}_{M_2} = x_2\overline{i} + y_2\overline{j} + z_2\overline{k}$ şi faptul că B este bază obţinem x_M, y_M, z_M ca mai sus. $\diamondsuit$

Observaţia 7.1.1 Pentru $\lambda = 1$ obţinem coordonatele mijlocului M al segmentului M_1M_2 :

$$x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z_M = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

Definiţia 7.1.1 Fie $M \in E_3$ un punct arbitrar. Notăm $r = dist(O, M)$, $\theta = \sphericalangle(Ox, OM')$, unde $M' = pr_{xOy}M$, $\varphi = \sphericalangle(OM, Oz)$.

r, θ, φ se numesc *coordonatele sferice* ale punctului M.

Observăm că $r \in [0, +\infty)$, $\theta \in [0, 2\pi]$, iar $\varphi \in [0, \pi]$.

Legătura între coordonatele sferice şi cele carteziene este stabilită prin formulele următoare:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta\sin\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$$

Definiţia 7.1.2 Fie $M \in E_3$ un punct arbitrar. Notăm $r = dist(O, M')$, unde $M' = pr_{xOy}M$, $\theta = \sphericalangle(Oz, OM')$, $z = z_M$.

r, θ, z se numesc *coordonatele cilindrice* ale punctului M.

Observăm că $r \in [0, +\infty)$, $\theta \in [0, 2\pi]$, iar $z \in \mathbb{R}$.

Legătura între coordonatele cilindrice şi cele carteziene este următoarea:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

7.2 Planul şi dreapta în spaţiu

Teorema 7.2.1 *Orice plan $P \subset E_3$ are ecuaţia carteziană*

$$ax + by + cz + d = 0, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, \ a^2 + b^2 + c^2 > 0 \tag{7.1}$$

şi reciproc, orice ecuaţie de forma (7.1) este ecuaţia unui plan.

Demonstraţie: " $\Rightarrow$ " Fie $P \subset E_3$ un plan dat şi $M_0(x_0, y_0, z_0) \in P$ un punct fixat. Fie $\overline{n} = a\cdot\overline{i} + b\cdot\overline{j} + c\cdot\overline{k}$ un vector a cărui direcţie este perpendiculară planului P. *Un astfel de vector se va numi vector normal la plan.*

Observăm că $M \in P \ \Leftrightarrow \ \overline{M_0M} \perp \overline{n}$.

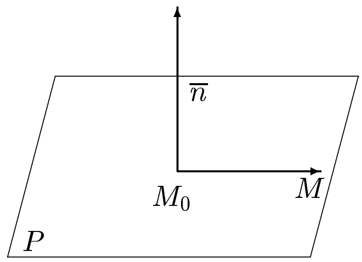
Dacă $M(x, y, z) \in E_3$ obţinem

$$\overline{M_0M} = (x - x_0)\overline{i} + (y - y_0)\overline{j} + (z - z_0)\overline{k}$$

şi din echivalenţa de mai sus rezultă

$$M \in P \;\Leftrightarrow\; \overline{M_0M} \cdot \overline{n} = 0 \;\Leftrightarrow\; (x - x_0) \cdot a + (y - y_0) \cdot b + (z - z_0) \cdot c = 0$$

$$ax + by + cz + (-ax_0 - by_0 - cz_0) = 0$$



Notăm $-ax_0 - by_0 - cz_0 = d$, de unde rezultă (7.1). Deoarece $\overline{n} \neq \overline{0}$, avem $a^2 + b^2 + c^2 > 0$.

" $\Leftarrow$ " Considerăm mulţimea $P \subset E_3$ definită astfel:

$$P = \{M(x, y, z) \in E_3 |\; ax + by + cz + d = 0,\; a, b, c, d \in \mathbb{R},\; a^2 + b^2 + c^2 > 0\}.$$

Dacă $M_0(x_0, y_0, z_0) \in P$, avem $ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$.

Pentru orice $M \in P$ avem $ax + by + cz + d = 0$. Atunci

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \qquad (7.2)$$

Notăm $\overline{n} = a\overline{i} + b\overline{j} + c\overline{k}$. Din (7.2) avem $\overline{n} \perp \overline{M_0M}$, de unde rezultă că $P \subset \{M \in E_3 |\; \overline{M_0M} \perp \overline{n}\}$.

Rămâne să demonstrăm incluziunea inversă.

Dacă $N \in \{M \in E_3 |\; \overline{M_0M} \perp \overline{n}\}$, avem $\overline{M_0N} \perp \overline{n}$. Fie $N(x, y, z)$; condiţia de ortogonalitate de mai sus se scrie sub forma

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

Înlocuim $d = -ax_0 - by_0 - cz_0$ şi avem $ax + by + cz + d = 0$, deci $N \in P$.$\diamondsuit$

Observaţia 7.2.1 Ecuaţia (7.1) se numeşte *ecuaţia carteziană generală a planului.* Ea rămâne neschimbată şi în cazul în care spaţiul este raportat la un reper cartezian arbitrar, nu neapărat ortonormat, argumentele folosite în cazul arbitrar neimplicând produsul scalar.

Ecuaţia (7.2) este ecuaţia planului ce trece prin punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$ şi este perpendicular direcţiei $\overline{n} = a\overline{i} + b\overline{j} + c\overline{k}$.

Ecuaţia vectorială a planului determinat de un punct şi un vector normal la plan este

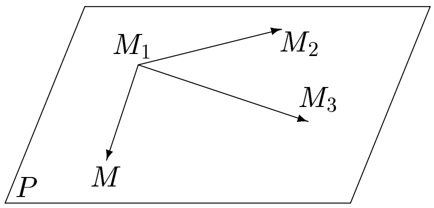
$$(\overline{r} - \overline{r_0}) \cdot \overline{n} = 0$$

(am înlocuit $\overline{M_0M} = \overline{r} - \overline{r}_0$.)

Propoziţia 7.2.1 *Ecuaţia planului determinat de trei puncte necoliniare $M_i(x_i, y_i, z_i)$, $i \in \{1, 2, 3\}$ este*

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Demonstraţie: Fie P planul determinat de punctele necoliniare M_1, M_2 şi M_3. Observăm că $M \in P \Leftrightarrow \overrightarrow{M_1M}, \overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}$ sunt coplanari $\Leftrightarrow$ $(\overrightarrow{M_1M}, \overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}) = 0$



Folosind expresiile corespunzătoare lui $\overrightarrow{M_1M}, \overrightarrow{M_1M_2}$ şi $\overrightarrow{M_1M_3}$ obţinem ecuaţia

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

Se observă că acest determinant se obţine din cel care apare în enunţul propoziţiei de mai sus, scăzând linia a doua din prima, a treia şi a patra linie. $\diamondsuit$

Observaţia 7.2.2 (i) Din Propoziţia 7.2.1 obţinem condiţia necesară şi suficientă ca patru puncte $M_i(x_i, y_i, z_i)$, $i = \overline{1, 4}$, să fie coplanare:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

(ii) Fie planul P care taie axele de coordonate în punctele A, B, C. Fie $A(a,0,0)$, $B(0,b,0)$, $C(0,0,c)$. Conform Propoziţiei 7.2.1, ecuaţia planului P este următoarea:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 & 1 \\ 0 & 0 & c & 1 \end{vmatrix} = 0$$

După efectuarea calculelor obţinem ecuaţia

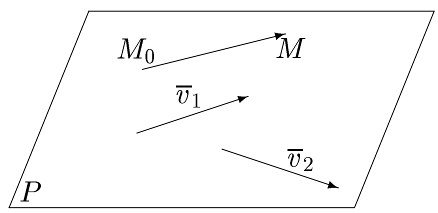
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 1 = 0$$

numită *ecuaţia planului prin tăieturi.*

Propoziţia 7.2.2 *Planul determinat de un punct* $M_0(x_0, y_0, z_0)$ *şi doi vectori necoliniari* $\overline{v_1} = l_1\overline{i} + m_1\overline{j} + n_1\overline{k}$, $\overline{v_2} = l_2\overline{i} + m_2\overline{j} + n_2\overline{k}$ *are ecuaţia*

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0$$

Demonstraţie: Fie planul P ca mai sus.



$M \in P \;\Leftrightarrow\; \overline{M_0M}, \overline{v}_1, \overline{v}_2$ coplanari $\;\Leftrightarrow\; (\overline{M_0M}, \overline{v}_1, \overline{v}_2) = 0$

Folosind reprezentarea vectorilor $\overline{M_0M}$, $\overline{v}_1$, $\overline{v}_2$ ecuaţia planului P se scrie sub forma $\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0.\diamondsuit$

Observaţia 7.2.3 Din Propoziţia 7.2.2 rezultă că există $t, s \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\begin{aligned} x - x_0 &= l_1 t + l_2 s \\ y - y_0 &= m_1 t + m_2 s \\ z - z_0 &= n_1 t + n_2 s \end{aligned}$$

de unde avem
$$\begin{cases} x = x_0 + l_1 t + l_2 s \\ y = y_0 + m_1 t + m_2 s \\ z = z_0 + n_1 t + n_2 s \end{cases}, \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

În acest fel am obţinut *ecuaţiile parametrice ale planului.*

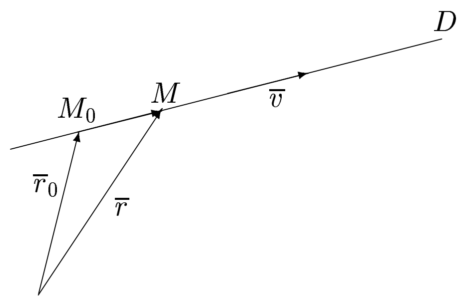
Propoziţia 7.2.3 *Ecuaţiile dreptei care trece prin punctul* $M_0(x_0, y_0, z_0)$ *şi are direcţia* $\overline{v} = l\overline{i} + m\overline{j} + n\overline{k}$ $(\neq \overline{0})$ *sunt*

$$(\overline{r} - \overline{r_0}) \times \overline{v} = \overline{0} \quad \textit{sau} \quad \overline{r} = \overline{r_0} + t \cdot \overline{v}, \quad t \in \mathbb{R} \qquad \text{- } \textit{ecuaţia vectorială}$$

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n} \qquad \text{- } \textit{ecuaţiile canonice} \tag{7.3}$$

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R} \qquad \text{- } \textit{ecuaţiile parametrice}$$

Demonstraţie: Fie D dreapta determinată de punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$ şi vectorul $\overline{v}$.



(i) $M \in D \Leftrightarrow \overline{M_0M}$ şi $\overline{v}$ sunt coliniari $\Leftrightarrow \overline{M_0M} \times \overline{v} = \overline{0}$.

Deoarece $\overline{M_0M} = \overline{r} - \overline{r}_0$ obţinem $(\overline{r} - \overline{r}_0) \times \overline{v} = \overline{0}$.

De asemenea, din faptul că $\overline{M_0M}$ şi $\overline{v}$ sunt coliniari rezultă că există $t \in \mathbb{R}$ astfel încât $\overline{M_0M} = t \cdot \overline{v}$.

(ii) Conform relaţiei de la (i), avem

$$\begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ l & m & n \end{vmatrix} = \overline{0}$$

Linia a doua şi cea de-a treia sunt proporţionale, de unde obţinem ecuaţiile (7.3).

(iii) Din ecuaţia vectorială $\overline{r} = \overline{r}_0 + t\overline{v}$ rezultă $x - x_0 = lt, \quad y - y_0 = mt$ şi $\quad z - z_0 = nt.\diamondsuit$

Definiţia 7.2.1 Vectorul $\overline{v} = l\overline{i} + m\overline{j} + n\overline{k}$ se numeşte *vector director* al dreptei D, iar scalarii l, m, n se numesc *parametri directori.*

Versorul $\overline{e} = \dfrac{\overline{v}}{\|\overline{v}\|}$ se numeşte *versor director* al dreptei D.

Notăm $\alpha = \sphericalangle(\overline{e}, \overline{i})$, $\beta = \sphericalangle(\overline{e}, \overline{j})$, $\gamma = \sphericalangle(\overline{e}, \overline{k})$; numerele $\cos\alpha, \cos\beta$ şi $\cos\gamma$ se numesc *cosinusurile directoare* ale dreptei D.

Observaţia 7.2.4 Cosinusurile directoare ale unei drepte verifică egalităţile următoare:

$$\overline{e} = \cos\alpha \cdot \overline{i} + \cos\beta \cdot \overline{j} + \cos\gamma \cdot \overline{k}$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

Propoziţia 7.2.4 *Dreapta determinată de punctele* $M_1(x_1, y_1, z_1)$ *şi* $M_2(x_2, y_2, z_2)$ *are ecuaţiile:*

$$\overline{r} = (1-t)\overline{r}_1 + t\overline{r}_2,\ t \in \mathbb{R} \quad \text{- } \textit{ecuaţia vectorială}$$

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \quad \text{- } \textit{ecuaţiile canonice} \tag{7.4}$$

$$\begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)t \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)t \\ z = z_2 + (z_2 - z_1)t \end{cases},\quad t \in \mathbb{R} \quad \text{- } \textit{ecuaţiile parametrice}$$

Demonstraţie: Aplicăm Propoziţia 7.2.3 pentru $\overline{v} = \overline{r}_2 - \overline{r}_1$.$\diamondsuit$

Propoziţia 7.2.5 *Fie planele*

$$(P_1) : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0, \quad a_1, b_1, c_1, d_1 \in \mathbb{R}, a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 > 0$$

$$(P_2) : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0, \quad a_2, b_2, c_2, d_2 \in \mathbb{R}, a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 > 0$$

(i) $P_1 \| P_2 \ \Leftrightarrow\ \dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2} \neq \dfrac{d_1}{d_2}$

(ii) P_1, P_2 *sunt confundate* $\Leftrightarrow\ \dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2} = \dfrac{d_1}{d_2}$

Demonstraţie: (i) Conform Teoremei 7.2.1, vectorii normali planelor P_1 respectiv P_2 sunt $\overline{n}_1 = a_1\overline{i} + b_1\overline{j} + c_1\overline{k}$ respectiv $\overline{n}_2 = a_2\overline{i} + b_2\overline{j} + c_2\overline{k}$.

Planele P_1 şi $\|P_2$ sunt paralele dacă vectorii $\overline{n}_1$ şi $\overline{n}_2$ sunt coliniari, adică $\exists\lambda \in \mathbb{R}^*$ astfel încât să avem $\overline{n}_1 = \lambda \cdot \overline{n}_2$.

Obţinem $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$.

(ii) Pentru orice punct $M_0(x_0, y_0, z_0) \in P_1$ avem $a_1x_0 + b_1y_0 + c_1z_0 + d_1 = 0$. Dacă $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{d_1}{d_2} = \lambda$, egalitatea de mai sus devine $\lambda(a_2x_0 + b_2y_0 + c_2z_0 + d_2) = 0$, de unde rezultă $M_0 \in P_2$.

Am arătat astfel că $P_1 \subseteq P_2$. Analog se demonstrează că proporţionalitatea coeficienţilor implică $P_2 \subseteq P_1$.$\diamondsuit$

Propoziţia 7.2.6 *Dreapta determinată de două plane neparalele*

$$(P_1) : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0, \quad a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 > 0$$

$$(P_2) : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0, \quad a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 > 0$$

are ecuaţiile

$$(D) : \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$$

Demonstraţie: D este dreapta de intersecţie a planelor P_1 şi P_2 dacă şi numai dacă $rang \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} = 2$.

Fie $\overline{v} = \overline{n}_1 \times \overline{n}_2$, vectorii $\overline{n}_1$ şi $\overline{n}_2$ fiind normali planelor P_1, P_2.

$$\overline{v} = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \cdot \overline{i} - \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \cdot \overline{j} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \overline{k}$$

Observăm că parametrii directori ai dreptei D sunt minorii cu semn ai matricei $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}$.$\diamondsuit$

Observaţia 7.2.5 Ecuaţiile unei drepte ce trece printr-un punct $M_0(x_0, y_0, z_0)$ şi este perpendiculară pe planul P având ecuaţia $ax + by + cz + d = 0$ este

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

Teorema 7.2.2 *Fie D dreapta de intersecţie a planelor P_1 şi P_2, unde*

$$(P_1) : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$$

$$(P_2) : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0.$$

Ecuaţia oricărui plan ce trece prin D este

$$\lambda(a_1x + b_1y + c_1z + d_1) + \mu(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Demonstraţie: Fie P un astfel de plan, având ecuaţia $ax+by+cz+d=0$.

Dreapta D poate fi privită ca intersecţia planelor P_1, P_2 şi P, astfel încât ea are ecuaţiile

$$(D): \begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0 \end{cases}$$

Deoarece sistemul de mai sus este compatibil nedeterminat şi $rang\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}=2$, avem

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}=0 \quad \text{şi} \quad \begin{vmatrix} a & b & d \\ a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \end{vmatrix}=0$$

deci există $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ astfel încât $a=\lambda a_1+\mu a_2$, $b=\lambda b_1+\mu b_2$, $c=\lambda c_1+\mu c_2$. De aici obţinem $d=\lambda d_1+\mu d_2$.

Ecuaţia planului P va fi

$$\lambda(a_1x+b_1y+c_1z+d_1)+\mu(a_2x+b_2y+c_2z+d_2)=0,\ \lambda,\mu\in\mathbb{R} \quad \diamondsuit$$

Definiţia 7.2.2 Mulţimea planelor care trec printr-o dreaptă dată D se numeşte *fascicul de plane*; dreapta D se numeşte *axa fasciculului.*

Observaţia 7.2.6 Mulţimea tuturor planelor paralele cu un plan dat

$$(P): ax+by+cz+d=0$$

are ecuaţia

$$ax+by+cz+\lambda=0, \quad \lambda\in\mathbb{R}$$

şi se numeşte *fascicul de plane paralele.*

7.3 Probleme de distanţe şi unghiuri

1. Distanţa de la un punct la un plan

Fie $M_0(x_0,y_0,z_0)$ un punct nesituat în planul P de ecuaţie generală

$$(P): ax+by+cz+d=0, \quad a,\ b,\ c,\ d\in\mathbb{R},\ a^2+b^2+c^2>0.$$

Fie $M_0'=pr_PM_0$, $M_0'(x_1,y_1,z_1)$. Fie $\overline{n}=a\overline{i}+b\overline{j}+c\overline{k}$ un vector normal planului P.

Vectorii $\overline{n}$ şi $\overline{M_0M_0'}$ sunt coliniari şi putem scrie:

$$\overline{n}\cdot\overline{M_0M_0'}=\|\overline{n}\|\cdot\|\overline{M_0M_0'}\|\cdot\cos\alpha,\quad \alpha=\sphericalangle(\overline{n}_0,\overline{M_0M_0'})$$

Observăm că $\alpha\in\{0,\pi\}$ şi vom avea

$$a(x_1-x_0)+b(y_1-y_0)+c(z_1-z_0)=\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cdot dist(M_0,P)\cdot(\pm1)$$

$$ax_1+by_1+cz_1-(ax_0+by_0+cz_0)=\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cdot dist(M_0,P)$$

Din $M_0'\in P$ avem $ax_1+by_1+cz_1+d=0$, de unde rezultă $ax_1+by_1+cz_1=-d$.

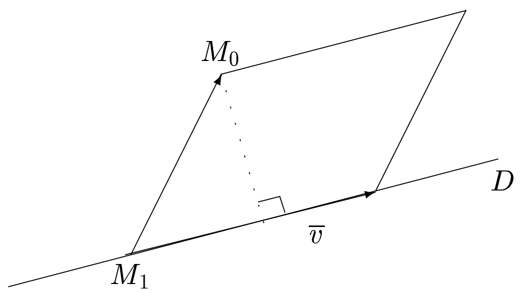
Înlocuim în relaţia de mai sus şi găsim

$$dist(M_0,P)=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

2. Distanţa de la un punct la o dreaptă

Fie $M_0(x_0,y_0,z_0)\notin D$, D fiind dreapta de ecuaţii

$$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}.$$



Punctul $M_1(x_1,y_1,z_1)$ este situat pe dreapta D, iar $\overline{v}=l\overline{i}+m\overline{j}+n\overline{k}$ este vectorul de direcţie al acestei drepte.

Aria paralelogramului construit pe vectorii $\overline{M_1M_0}$ şi $\overline{v}$ este

$$\|\overline{v}\times\overline{M_1M_0}\|=\|\overline{v}\|\cdot dist(M_0,D)$$

şi de aici obţinem

$$dist(M_0,D)=\frac{\|\overline{v}\times\overline{M_1M_0}\|}{\|\overline{v}\|}.$$

Folosind notaţiile

$$\widetilde{A} = \begin{vmatrix} m & n \\ y_0 - y_1 & z_0 - z_1 \end{vmatrix}$$

$$\widetilde{B} = \begin{vmatrix} l & n \\ x_0 - x_1 & z_0 - z_1 \end{vmatrix}$$

$$\widetilde{C} = \begin{vmatrix} l & m \\ x_0 - x_1 & y_0 - y_1 \end{vmatrix}$$

putem scrie

$$dist(M_0, D) = \sqrt{\frac{\widetilde{A}^2 + \widetilde{B}^2 + \widetilde{C}^2}{l^2 + m^2 + n^2}}$$

3. Unghiul dintre două drepte

Fie dreptele D_1 şi D_2 având ecuaţiile

$$(D_1) : \frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1}$$

$$(D_2) : \frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2}$$

Vectorul director al dreptei D_1 este $\overline{v}_1 = l_1\overline{i} + m_1\overline{j} + n_1\overline{k}$, iar vectorul director $\overline{v}_2 = l_2\overline{i} + m_2\overline{j} + n_2\overline{k}$.

Unghiul dreptelor D_1 şi D_2 se calculează cu formula

$$\cos\sphericalangle(D_1, D_2) = \frac{\overline{v}_1 \cdot \overline{v}_2}{\|\overrightarrow{v}_1\| \cdot \|\overrightarrow{v}_2\|} = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{(l_1^2 + m_1^2 + n_1^2)(l_2^2 + m_2^2 + n_2^2)}}$$

4. Unghiul dintre două plane

Fie planele P_1 şi P_2 având ecuaţiile

$$(P_1) : a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0$$

$$(P_2) : a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0$$

Vectorii normali acestor plane sunt $\overline{n}_1 = a_1\overline{i} + b_1\overline{j} + c_1\overline{k}$ şi $\overline{n}_2 = a_2\overline{i} + b_2\overline{j} + c_2\overline{k}$.

Observăm că $\theta = \sphericalangle(P_1, P_2) = \sphericalangle(\overline{n}_1, \overline{n}_2)$. Putem calcula

$$\cos\sphericalangle(P_1, P_2) = \frac{\overline{n}_1 \cdot \overline{n}_2}{\|\overline{n}_1\| \cdot \|\overline{n}_2\|} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2}{\sqrt{(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2)(a_2^2 + b_2^2 + c_2^2)}}$$

5. Unghiul dintre o dreaptă şi un plan

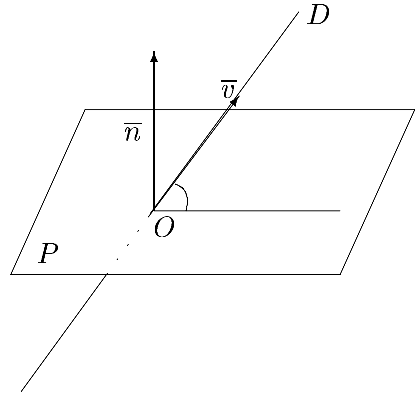
Fie o dreaptă D având vectorul director $\overline{v} = l\overline{i} + m\overline{j} + n\overline{k}$ şi un plan P cu vectorul normal $\overline{n} = a\overline{i} + b\overline{j} + c\overline{k}$.

Fie $\theta = \sphericalangle(D, P)$. Atunci avem:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{\overline{n} \cdot \overline{v}}{\|\overline{n}\| \cdot \|\overline{v}\|}$$

de unde obţinem

$$\sin\theta = \frac{\overline{n} \cdot \overline{v}}{\|\overline{n}\| \cdot \|\overline{v}\|} = \frac{al + bm + cn}{\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)(l^2 + m^2 + n^2)}}$$



7.4 Perpendiculara comună a două drepte în spaţiu

Fie dreptele necoplanare D_1 şi D_2 de ecuaţii

$$(D_1) : \frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1}$$

$$(D_2) : \frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2}$$

Teorema 7.4.1 *Există o dreaptă unică D care se sprijină pe dreptele D_1 şi D_2 şi este perpendiculară pe fiecare dintre ele, numită perpendiculara comună a dreptelor D_1 şi D_2.*

Demonstraţie: Dreapta căutată se obţine ca intersecţie de două plane, în felul următor:

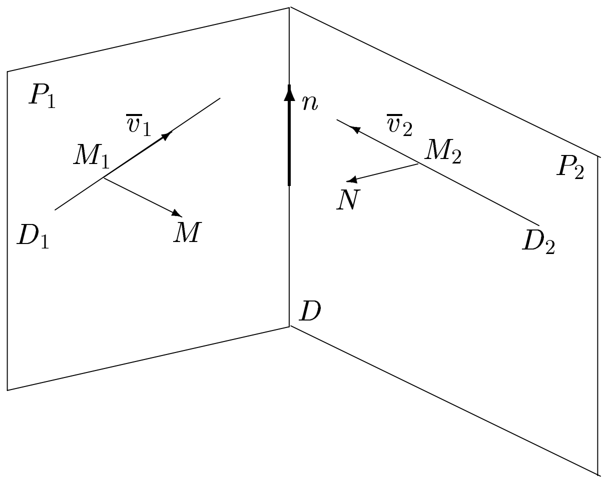
fie $\overline{v}_1 = l_1\overline{i} + m_1\overline{j} + n_1\overline{k}$ şi $\overline{v}_2 = l_2\overline{i} + m_2\overline{j} + n_2\overline{k}$ vectorii de direcţie ai celor două drepte şi fie

$$\overline{n} = \overline{v}_1 \times \overline{v}_2 = \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix} \cdot \overline{i} - \begin{vmatrix} l_1 & n_1 \\ l_2 & n_2 \end{vmatrix} \cdot \overline{j} + \begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix} \cdot \overline{k}$$

Notăm cu A, B, C componentele acestui vector.

Fie planul P_1 ce conţine dreapta D_1 şi este paralel cu direcţia $\overline{n}$ şi planul P_2 ce conţine dreapta D_2 şi este paralel cu direcţia $\overline{n}$.

Dreapta $D = P_1 \cap P_2$ este perpendiculara comună a dreptelor D_1 şi D_2.



Ecuaţiile acestei drepte sunt următoarele:

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ A & B & C \end{vmatrix} = 0 \\ \\ \begin{vmatrix} x - x_2 & y - y_2 & z - z_2 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ A & B & C \end{vmatrix} = 0 \end{cases}$$

Definiţia 7.4.1 Fie D_1 şi D_2 două drepte în spaţiu. Numărul

$$dist(D_1, D_2) = \inf_{\substack{M \in D_1 \\ N \in D_2}} dist(M, N)$$

se numeşte *distanţa* dintre dreptele D_1 şi D_2.

Observaţia 7.4.1 (i) Dacă $D_1 \cap D_2 = \{P_0\}$, atunci $dist(D_1, D_2) = 0$.

(ii) Dacă $D_1 \| D_2$, fie $P \in D_1$; atunci $dist(D_1, D_2) = dist(P; D_2)$.

(iii) Dacă D_1 şi D_2 sunt necoplanare, atunci $dist(D_1, D_2)$ reprezintă lungimea segmentului de pe perpendiculara comună a dreptelor D_1 şi D_2, cuprins între D_1 şi D_2. În acest caz, $dist(D_1, D_2)$ se poate calcula astfel:

$|(\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{M_1M_2})|$ reprezintă volumul paralelipipedului construit pe vectorii $\overline{v}_1, \overline{v}_2$ şi $\overline{M_1M_2}$, iar $\|\overline{v}_1 \times \overline{v}_2\|$ reprezintă aria bazei. Distanţa căutată, $dist(D_1, D_2)$, este chiar înălţimea corespunzătoare acestei baze.

În concluzie, vom avea

$$dist(D_1, D_2) = \frac{|(\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{M_1M_2})|}{\|\overline{v}_1 \times \overline{v}_2\|}$$

Observaţia 7.4.2 Condiţia necesară şi suficientă ca dreptele D_1 şi D_2 să fie necoplanare este următoarea:

$$(\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{M_1M_2}) \neq 0$$

Capitolul 8

Cuadrice

8.1 Sfera

Fie $C_0(x_0, y_0, z_0)$ un punct fixat în spaţiu şi $R > 0$ un număr real dat.

Definiţia 8.1.1 *Sfera* de centru C_0 şi rază R este locul geometric al punctelor din spaţiu situate la distanţa R de punctul C_0; se notează $\mathcal{S}(C_0, R)$.

Teorema 8.1.1 *Punctul $M(x, y, z)$ este situat pe sfera $\mathcal{S}(C_0, R)$ dacă şi numai dacă $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$.*

Demonstraţie: $M(x, y, z) \in \mathcal{S}(C_0, R) \Leftrightarrow dist(M, C_0) = R \Leftrightarrow \|\overrightarrow{C_0M}\| = R \Leftrightarrow (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2 . \diamondsuit$

Ecuaţia de mai sus se numeşte *ecuaţia carteziană implicită a sferei* sau *ecuaţia sub formă de pătrate.*

Propoziţia 8.1.1 *Ecuaţiile sferei $\mathcal{S}(C_0, R)$ sunt următoarele:*

(i) ecuaţia vectorială:

$$\|\overline{r} - \overline{r}_0\| = R \text{ sau } \overline{r} = \overline{r}_0 + R(\cos\theta \sin\varphi \cdot \overline{i} + \sin\theta \sin\varphi \cdot \overline{j} + \cos\varphi \cdot \overline{k})$$

unde $\overrightarrow{OM} \in \overline{r}$, $\overrightarrow{OC_0} \in \overline{r}_0$, *iar* $\theta \in [0, 2\pi]$, $\varphi \in [0, \pi]$.

(ii) ecuaţiile parametrice:

$$\begin{cases} x = x_0 + R\cos\theta \sin\varphi \\ y = y_0 + R\sin\theta \sin\varphi \\ z = z_0 + R\cos\varphi \end{cases}, \quad \theta \in [0, 2\pi], \ \varphi \in [0, \pi]$$

(iii) ecuaţia carteziană generală:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, \ a^2 + b^2 + c^2 - d > 0.$$

Demonstraţie: (i)Utilizăm definiţia şi $\overline{C_0M} = \overline{r} - \overline{r_0}$, $\|\overline{C_0M}\| = R$.
În continuare, folosim legătura între coordonatele sferice şi cele carteziene.
(iii) Ecuaţia de mai sus se mai poate scrie sub forma

$$(x+a)^2 + (y+b)^2 + (z+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - d$$

Din ipoteză, $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$; există R număr real, $R > 0$ astfel încât $a^2 + b^2 + c^2 - d = R^2$.

În concluzie, ecuaţia de mai sus reprezintă ecuaţie sferei cu centrul $C_0(-a, -b, -c)$ şi raza $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$. $\diamondsuit$

Propoziţia 8.1.2 *Ecuaţia planului tangent la sfera $\mathcal{S}(C_0, R)$ de ecuaţie*

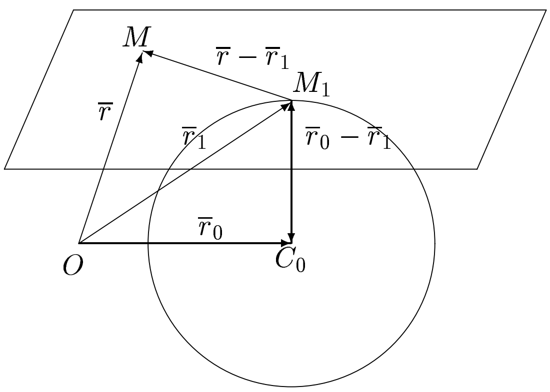
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$$

în punctul $M_1(x_1, y_1, z_1) \in \mathcal{S}(C_0, R)$ este

$$(T_{M_1}) : (x - x_0)(x_1 - x_0) + (y - y_0)(y_1 - y_0) + (z - z_0)(z_1 - z_0) = R^2$$

(ecuaţia planului tangent la sferă într-un punct dat, scrisă prin dedublare).

Demonstraţie:



Planul tangent la sfera $\mathcal{S}(C_0, R)$ conţine acele puncte M cu proprietatea $\overrightarrow{M_1M} \perp \overrightarrow{C_0M_1}$ sau, echivalent, $\overrightarrow{M_1M} \cdot \overrightarrow{M_1C_0} = 0$.

Din $\overline{M_1M} = \overline{r} - \overline{r}_1$, $\overline{M_1C_0} = \overline{r}_0 - \overline{r}_1$ obţinem

$$(\overline{r} - \overline{r}_1)(\overline{r}_0 - \overline{r}_1) = 0$$

$$(\overline{r} - \overline{r}_0 + \overline{r}_0 - \overline{r}_1)(\overline{r}_0 - \overline{r}_1) = 0$$

$$(\overline{r} - \overline{r}_0)(\overline{r}_0 - \overline{r}_1) + (\overline{r}_0 - \overline{r}_1)^2 = 0$$

Înlocuim $\|\overline{r_0} - \overline{r_1}\| = R$ şi găsim

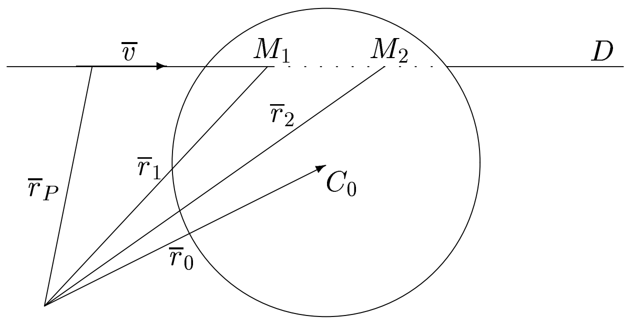
$$(\overline{r} - \overline{r}_0)(\overline{r}_1 - \overline{r}_0) - R^2 = 0$$

$$(x - x_0)(x_1 - x_0) + (y - y_0)(y_1 - y_0) + (z - z_0)(z_1 - z_0) = R^2 \ \diamondsuit$$

Propoziţia 8.1.3 *Fie sfera $\mathcal{S}(C_0, R)$ şi D o dreaptă variabilă ce trece printr-un punct fixat P şi taie sfera în punctele M_1 şi M_2. Atunci*

$$\overline{PM_1} \cdot \overline{PM_2} = constant.$$

Demonstraţie:



Din $\overline{PM_1} = \overline{r}_1 - \overline{r}_P$ şi $\overline{PM_2} = \overline{r}_2 - \overline{r}_P$ avem

$$\overline{PM_1} \cdot \overline{PM_2} = (\overline{r}_1 - \overline{r}_P) \cdot (\overline{r}_2 - \overline{r}_P)$$

Folosind ecuaţia vectorială a dreptei D, vom avea:

$M_1 \in D$, deci există $t_1 \in \mathbb{R}$ astfel încât $\overline{r}_1 = \overline{r}_P + t_1 \cdot \overline{v}$; $M_2 \in D$ implică faptul că $\exists\ t_2 \in \mathbb{R}$ astfel încât $\overline{r}_2 = \overline{r}_P + t_2 \cdot \overline{v}$.

Atunci avem:

$$\overline{PM_1} \cdot \overline{PM_2} = (t_1 \cdot \overline{v})(t_2 \cdot \overline{v}) = t_1 \cdot t_2 \cdot \|\overline{v}\|^2 \tag{8.1}$$

Folosim acum ecuaţia vectorială a sferei $\mathcal{S}(C_0, R)$:

$$\|\overline{r} - \overline{r}_0\| = R \ \Leftrightarrow\ \|\overline{r} - \overline{r}_0\|^2 = R^2 \ \Leftrightarrow\ (\overline{r} - \overline{r}_0)^2 = R^2$$

Ecuaţia vectorială a dreptei D este

$$(D) : \overline{r} = \overline{r}_P + t \cdot \overline{v}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Atunci intersecţia dintre sferă şi dreaptă este caracterizată astfel:

$$(\overline{r}_P + t \cdot \overline{v} - \overline{r}_0)^2 = R^2$$

sau, echivalent,

$$t^2 \|\overline{v}\|^2 + 2(\overline{r}_P - \overline{r}_0)\overline{v} \cdot t + \|\overline{r}_P - \overline{r}_0\|^2 - R^2 = 0$$

Însă $D \cap \mathcal{S}(C_0, R) = \{M_1, M_2\}$, deci t_1, t_2 sunt soluţiile ecuaţiei de mai sus.

Obţinem relaţia

$$t_1 \cdot t_2 = \frac{\|\overline{r}_P - \overline{r}_0\|^2 - R^2}{\|\overline{v}\|^2}$$

Acum aplicăm (8.1) şi găsim

$$\overline{PM_1} \cdot \overline{PM_2} = \|\overline{r}_P - \overline{r}_0\|^2 - R^2 = \text{constant}.\diamondsuit$$

Definiţia 8.1.2 Numărul

$$\rho(P, \mathcal{S}) = \overline{PM_1} \cdot \overline{PM_2} = \|\overline{r}_P - \overline{r}_0\|^2 - R^2$$

se numeşte *puterea punctului P faţă de sfera $\mathcal{S} = \mathcal{S}(C_0, R)$*.

Observaţia 8.1.1 Puterea punctului faţă de sferă caracterizează punctele sferei, punctele interioare ei respectiv cele exterioare, în felul următor:

$\rho(P, S) > 0 \;\Leftrightarrow\; P \in \; ExtS(C_0, R) = \{M \in E_3 |\; dist(C_0, M) > R\}$

$\rho(P, S) = 0 \;\Leftrightarrow\; P \in \; S(C_0, R)$

$\rho(P, S) < 0 \;\Leftrightarrow\; P \in \; IntS(C_0, R) = \{M \in E_3 |\; dist(C_), M) < R\}$.

Propoziţia 8.1.4 *Locul geometric al punctelor din spaţiu care au puteri egale faţă de două sfere date este un plan perpendicular pe linia centrelor sferelor, numit plan radical al celor două sfere.*

Demonstraţie: Fie P un punct care aparţine locului geometric căutat. Avem $\rho(P, \mathcal{S}) = \rho(P, \mathcal{S}')$, $\mathcal{S} = \mathcal{S}(C_0, R)$ şi $\mathcal{S}' = \mathcal{S}(C_0', R')$ fiind sferele date.

Aplicăm Definiţia 8.1.2:

$$\|\overline{r}_P - \overline{r}_0\|^2 - R^2 = \|\overline{r}_P - \overline{r'}_0\|^2 - (R')^2$$

unde $\overline{OC_0} \in \overline{r}_0$, iar $\overline{OC_0'} \in \overline{r'}_0$.

Fie $C_0(x_0, y_0, z_0)$, $C_0'(x_0', y_0', z_0')$, $P(x, y, z)$. Obţinem

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 - R^2 = (x - x_0')^2 + (y - y_0')^2 + (z - z_0')^2 - (R')^2$$

După efectuarea calculelor găsim $(x_0' - x_0)x + (y_0' - y_0)y + (z_0' - z_0)z +$ $+\dfrac{1}{2}(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - R^2 - (x_0')^2 - (y_0')^2 - (z_0')^2 + (R')^2) = 0$ (sau $(\mathcal{S}) - (\mathcal{S}') = 0$), care reprezintă ecuaţia unui plan deoarece

$$(x_0 - x_0')^2 + (y_0 - y_0')^2 + (z_0 - z_0')^2 > 0.$$

Vectorul normal acestui plan este

$$\overline{n} = (x_0' - x_0)\overline{i} + (y_0' - y_0)\overline{j} + (z_0' - z_0)\overline{k},$$

deci planul radical este perpendicular pe dreapta C_0C_0'.$\diamondsuit$

Propoziţia 8.1.5 *Ecuaţia sferei determinată de patru puncte necoplanare* $M_i(x_i, y_i, z_i)$, $i = \overline{1,4}$, *este*

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2 & x & y & z & 1 \\ x_1^2+y_1^2+z_1^2 & x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2+z_2^2 & x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2+z_3^2 & x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4^2+y_4^2+z_4^2 & x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Demonstraţie: Fie sfera

$$(\mathcal{S}) : x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0$$

unde $a,\ b,\ c \in \mathbb{R},\ a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$. Adăugând condiţiile $M_i \in \mathcal{S}$, $i = \overline{1,4}$, obţinem un sistem liniar cu necunoscutele a, b, c, d. Acest sistem fiind compatibil determinat, determinantul caracteristic este nul:

$$\begin{vmatrix} 2x & 2y & 2z & 1 & x^2+y^2+z^2 \\ 2x_1 & 2y_1 & 2z_1 & 1 & x_1^2+y_1^2+z_1^2 \\ 2x_2 & 2y_2 & 2z_2 & 1 & x_2^2+y_2^2+z_2^2 \\ 2x_3 & 2y_3 & 2z_3 & 1 & x_3^2+y_3^2+z_3^2 \\ 2x_4 & 2y_4 & 2z_4 & 1 & x_4^2+y_4^2+z_4^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Înmulţim prima, a doua şi a treia coloană cu $\frac{1}{2}$ şi efectuăm o permutare circulară a coloanelor şi vom obţine ecuaţia din enunţ. $\diamondsuit$

Observaţia 8.1.2 (i) Studiem intersecţia dintre o sferă $\mathcal{S} = \mathcal{S}(C_0, R)$ şi o dreaptă D :

$\mathcal{S} \cap D = \emptyset$ (D este exterioară sferei) $\Leftrightarrow$ $dist(C_0, D) > R$

$\mathcal{S} \cap D = \{M_0\}$ (D este tangentă sferei în punctul M_0) $\Leftrightarrow$ $dist(C_0, D) = R$

$\mathcal{S} \cap D = \{M_1, M_2\}$ (D este secantă sferei) $\Leftrightarrow$ $dist(C_0, D) < R$.

(ii) Studiem intersecţia dintre o sferă $\mathcal{S} = \mathcal{S}(C_0, R)$ şi un plan P :

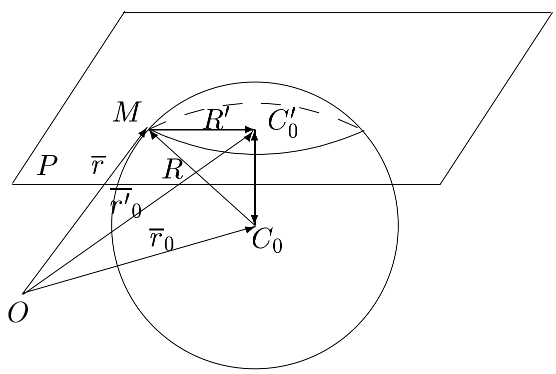
$\mathcal{S} \cap P = \emptyset \Leftrightarrow dist(C_0, P) > R$

$\mathcal{S} \cap P = \{M_0\} \Leftrightarrow dist(C_0, P) = R$; în acest caz, $M_0 = pr_P C_0$ şi P este chiar planul tangent sferei în punctul M_0

$\mathcal{S} \cap P = \mathcal{C}$ (un cerc) $\Leftrightarrow$ $dist(C_0, P) < R$.

Cercul de intersecţie are centrul în punctul $C'_0 = pr_P C_0$, iar raza sa este

$$R' = \sqrt{R^2 - dist(C_0, P)^2}.$$



Ecuaţiile acestui cerc sunt

$$\begin{cases} \|\overline{r} - \overline{r}_0\| = R \\ (\overline{r'}_0 - \overline{r}_0)(\overline{r'}_0 - \overline{r}) = 0 \end{cases}$$

(iii) Dacă se dau două sfere $\mathcal{S} = \mathcal{S}(C_0, R)$ şi $\mathcal{S}' = \mathcal{S}(C'_0, R')$, atunci ele se intersectează după un cerc dacă $|R - R'| < dist(C_0, C'_0) < R + R'$.

În aceste condiţii, ecuaţiile cercului $\mathcal{C} = \mathcal{S} \cap \mathcal{S}'$ sunt

$$\mathcal{C} : \begin{cases} \mathcal{S} = 0 \\ \mathcal{S}' = 0 \end{cases} \quad \text{sau} \quad \mathcal{C} : \begin{cases} \mathcal{S} = 0 \\ \mathcal{S} - \mathcal{S}' = 0 \end{cases}$$

Observăm că acest cerc este situat în planul radical al celor două sfere.

Definiţia 8.1.3 Se numeşte *fascicul de sfere* mulţimea sferelor ce trec prin trei puncte necoliniare date.

Observaţia 8.1.3 Ecuaţia fasciculului de sfere $(\mathcal{S}_\lambda)$ determinat de două sfere date

$$(\mathcal{S}) : x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0$$

$$(\mathcal{S}') : x^2 + y^2 + z^2 + 2a'x + 2b'y + 2c'z + d' = 0$$

care se intersectează după un cerc este

$$x^2+y^2+z^2+2ax+2by+2cz+d+\lambda(x^2+y^2+z^2+2a'x+2b'y+2c'z+d') = 0, \lambda \in \mathbb{R}$$

sau

$$(\mathcal{S}_\lambda) : (\mathcal{S}) + \lambda(\mathcal{S}') = 0, \ \lambda \in \mathbb{R}$$

8.2 Cuadrice în forma redusă

Definiţia 8.2.1 Se numeşte *cuadrică* în spaţiul euclidian mulţimea

$$\{M(x,y,z) \in E_3 |\ a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz+$$
$$+2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0, \ a_{ij} \in \mathbb{R}, \ i,j = \overline{1,4}\}.$$

Definiţia 8.2.2 Se numeşte *elipsoid* (E) o cuadrică pentru care există un sistem de axe ortogonale $Oxyz$ faţă de care ecuaţia cuadricei este

$$(E) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0, \quad a,b,c > 0$$

Observaţia 8.2.1 $\forall \ M(x,y,z) \in E$, avem $M_1(x,y,-z)$, $M_2(x,-y,z)$, $M_3(-x,y,z) \in E$; planele (xOy), (xOz), (yOz) sunt plane de simetrie pentru elipsoid.

$\forall \ M(x,y,z) \in E$, avem $M_4(x,-y,-z), M_5(-x,y,-z), M_6(-x,-y,z) \in E$; axele Ox, Oy, Oz sunt axe de simetrie pentru elipsoid.

$\forall \ M(x,y,z) \in E$, avem $M_7(-x,-y,-z) \in E$; deducem că originea $O(0,0,0)$ este centru de simetrie pentru elipsoid.

Observaţia 8.2.2 Studiem intersecţia dintre elipsoid şi planele de coordonate sau plane paralele cu planele de coordonate.

$$E \cap (xOy) : \begin{cases} z = 0 \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \end{cases}$$

Observăm că $E \cap (xOy)$ este elipsa de semiaxe a, b. În acelaşi mod se studiază $E \cap (xOz)$ şi $E \cap (yOz)$.

Studiem acum $E \cap P$, unde $(P) : z = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Obţinem

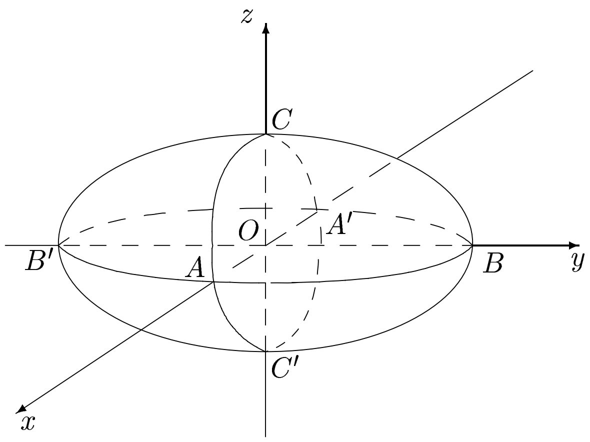
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{\lambda^2}{c^2}$$

Dacă $\lambda \in (-c, c)$, $E \cap P$ este o elipsă reală:

$$\frac{x^2}{\left(a\sqrt{1-\frac{\lambda^2}{c^2}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(b\sqrt{1-\frac{\lambda^2}{c^2}}\right)^2} - 1 = 0$$

Analog se studiază intersecţia elipsoidului cu plane paralele cu (xOz) respectiv (yOz).

Reprezentarea geometrică:



Punctele $A(a,0,0)$, $A(-a,0,0)$, $B(0,b,0)$, $B'(0,-b,0)$, $C(0,0,c)$, $C'(0,0,-c)$ se numesc vârfurile elipsoidului, iar a,b,c se numesc semiaxe.

Un caz particular important este cel al elipsoidului de rotaţie:

$$\frac{x^2+y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

Observaţia 8.2.3 Ecuaţiile parametrice ale elipsoidului sunt următoarele:

$$\begin{cases} x = a\cos\theta\sin\varphi \\ y = b\sin\theta\sin\varphi \\ z = c\cos\varphi \end{cases}, \quad \theta \in [0, 2\pi],\ \varphi \in [0, \pi]$$

Definiţia 8.2.3 Se numeşte *hiperboloid cu o pânză* (H_1) o cuadrică pentru care există un sistem de axe ortogonale $Oxyz$ faţă de care ecuaţia cuadricei este

$$(H_1): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0, \quad a,b,c > 0$$

Observaţia 8.2.4 (i) H_1 are ca plane de simetrie planele de coordonate, axele de coordonate sunt axe de simetrie, iar originea este centru de simetrie.

(ii) H_1 intersectează planul (xOy) după o elipsă de semiaxe a, b :

$$H_1 \cap (xOy) : \begin{cases} z = 0 \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \end{cases}$$

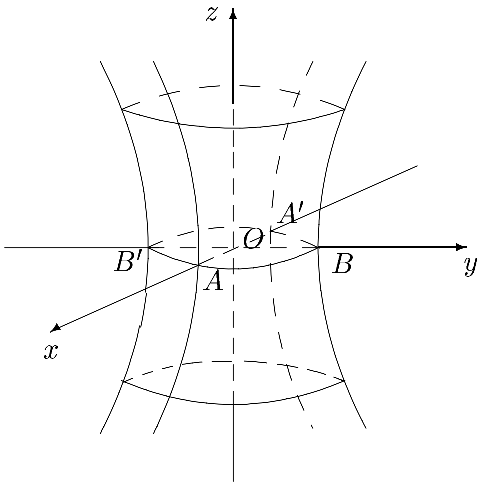
Fie planul $(P) : z = \lambda,\ \lambda \in \mathbb{R}$. Studiem $H_1 \cap P$:

$$\begin{cases} z = \lambda \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 + \dfrac{\lambda^2}{c^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \lambda \\ \dfrac{x^2}{\left(a\sqrt{1 + \dfrac{\lambda^2}{c^2}}\right)^2} + \dfrac{y^2}{\left(b\sqrt{1 + \dfrac{\lambda^2}{c^2}}\right)^2} = 1 \end{cases}$$

Obţinem elipse reale, pentru orice $\lambda \in \mathbb{R}$.

În acelaşi mod, $H_1 \cap (xOz)$ este o hiperbolă cu axa transversală Ox, iar $H_1 \cap (yOz)$ este o hiperbolă cu axa transversală Oy.

Reprezentarea geometrică:



Punctele $A(a, 0, 0)$, $A(-a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$, $B'(0, -b, 0)$ se numesc vârfuri, iar Oz este axa netransversală a hiperboloidului H_1.

Cuadricele de ecuaţii

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

reprezintă, de asemenea, hiperboloizi cu o pânză, având axa netransversală Ox respectiv Oy.

Definiţia 8.2.4 Se numeşte *hiperboloid cu două pânze* (H_2) o cuadrică pentru care există un sistem de axe ortogonale $Oxyz$ faţă de care ecuaţia cuadricei este

$$(H_2) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0, \quad a, b, c > 0$$

Observaţia 8.2.5 (i) Hiperboloidul cu două pânze are aceleaşi simetrii ca hiperboloidul cu o pânză.

(ii) Observăm că H_2 nu intersectează planul (xoy) :

$$H_2 \cap (xOy) : \begin{cases} z = 0 \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + 1 = 0 \end{cases}$$

Fie planul $(P) : z = \lambda,\ \lambda \in \mathbb{R}$. Studiem intersecţia hiperboloidului H_2 cu acest plan:

$$H_2 \cap P : \begin{cases} z = \lambda \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{\lambda^2}{c^2} - 1 \end{cases}$$

Dacă $\lambda \in (-\infty, -c) \cup (c, +\infty)$, $H_2 \cap P$ reprezintă elipse reale:

$$\begin{cases} z = \lambda \\ \dfrac{x^2}{\left(a\sqrt{\dfrac{\lambda^2}{c^2} - 1}\right)^2} + \dfrac{y^2}{\left(b\sqrt{\dfrac{\lambda^2}{c^2} - 1}\right)^2} = 1 \end{cases}$$

Dacă $\lambda \in (-c, c)$, $H_2 \cap P = \emptyset$. Dacă $\lambda = \pm c$, atunci $H_2 \cap P = \{C\}$ respectiv $H_2 \cap P = \{C'\}$.

Studiem intersecţia hiperboloidului H_2 cu planul (xoz) :

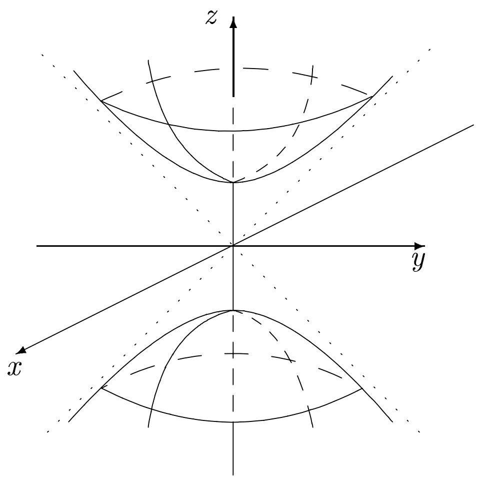
$$H_2 \cap (xOz) : \begin{cases} y = 0 \\ -\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \end{cases}$$

Se obţine o hiperbolă cu axa transversală Oz.

Analog, intersecţia dintre hiperboloidul H_2 şi planul (yoz) este o hiperbolă având axa transversală Oz :

$$H_2 \cap (yOz) : \begin{cases} x = 0 \\ -\dfrac{y^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \end{cases}$$

Reprezentarea geometrică:



Punctele $C(0,0,c)$, $C'(0,0,-c)$ se numesc vârfuri, iar Oz este axa transversală a hiperboloidului cu două pânze.

Cuadricele de ecuaţii

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0$$

reprezintă de asemenea hiperboloizi cu două pânze, având axa transversală Ox respectiv Oy.

Definiţia 8.2.5 Se numeşte *paraboloid eliptic* (P_e) o cuadrică pentru care există un sistem de axe ortogonale $Oxyz$ faţă de care ecuaţia cuadricei este

$$(P_e) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z, \quad a, b > 0$$

Observaţia 8.2.6 (i) Dacă $M(x, y, z) \in P_e$, observăm că $M_1(-x, y, z)$, $M_2(x, -y, z)$, $M_3(-x, -y, z) \in P_e$, deci planele (yOz), (xOz) sunt plane de simetrie, iar axa Oz este axă de simetrie a paraboloidului eliptic.

(ii) Studiem intersecţia paraboloidului eliptic cu planele de coordonate şi cu plane paralele cu acestea.

Observăm că $P_e \cap (xOy) = \{O(0, 0, 0)\}$.

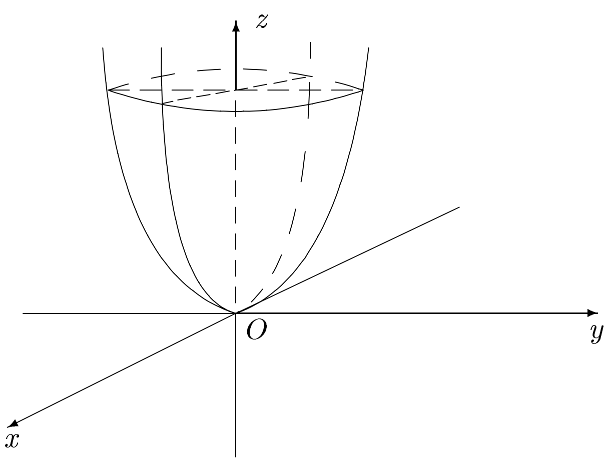
Fie planul $(P) : z = \lambda,\ \lambda \in \mathbb{R}$. Dacă $\lambda > 0,\ P_e \cap P$ este o elipsă reală:

$$\begin{cases} z = \lambda \\ \dfrac{x^2}{(a\sqrt{\lambda})^2} + \dfrac{y^2}{(b\sqrt{\lambda})^2} = 1 \end{cases}$$

Dacă $\lambda < 0,\ P_e \cap P = \emptyset$.

Intersecţia paraboloidului eliptic cu planul (xoz) este o parabolă cu axa transversală Oz, de ecuaţii $y = 0,\ \dfrac{x^2}{a^2} = z$. Intersecţia paraboloidului eliptic cu planul (yoz) este o parabolă cu axa transversală Oz, de ecuaţii $x = 0,\ \dfrac{y^2}{b^2} = z$.

Reprezentarea geometrică:



Axa Oz se numeşte axă transversală a paraboloidului eliptic, iar originea este vârful său.

Cuadricele de ecuaţii $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = y$, $\dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = x$ reprezintă paraboloizi eliptici, având axele transversale Oy respectiv Ox.

Definiţia 8.2.6 Se numeşte *paraboloid hiperbolic* (P_h) o cuadrică pentru care există un sistem de axe ortogonale $Oxyz$ faţă de care ecuaţia cuadricei este

$$(P_h) : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z, \quad a, b > 0$$

Observaţia 8.2.7 (i) Paraboloidul hiperbolic are aceleaşi simetrii ca paraboloidul eliptic.

(ii) Studiem intersecţia acestei cuadrice cu planele de coordonate şi cu plane paralele cu acestea.

Fie $z = 0$; obţinem $\frac{x}{a} = \pm\frac{y}{b}$, deci $P_h \cap (xOy)$ reprezintă două drepte concurente în origine.

Fie P un plan paralel cu planul (xoy), de ecuaţie $(P) : z = \lambda,\ \lambda \in \mathbb{R}$.

Dacă $\lambda > 0,\ P_h \cap P$ este o hiperbolă cu axa transversală Ox :

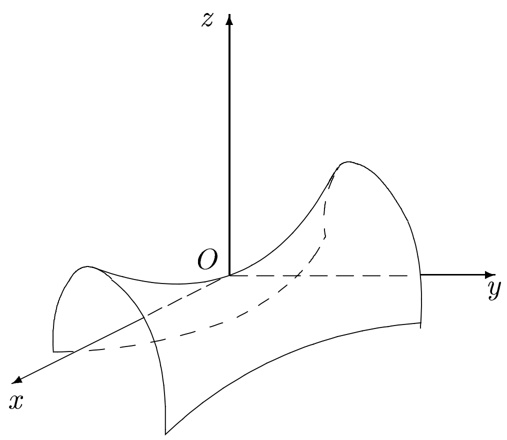
$$\begin{cases} z = \lambda \\ \dfrac{x^2}{(a\sqrt{\lambda})^2} - \dfrac{y^2}{(b\sqrt{\lambda})^2} = 1 \end{cases}$$

Dacă $\lambda < 0,\ P_h \cap P$ este o hiperbolă cu axa transversală Oy :

$$\begin{cases} z = \lambda \\ -\dfrac{x^2}{(a\sqrt{-\lambda})^2} + \dfrac{y^2}{(b\sqrt{-\lambda})^2} = 1 \end{cases}$$

Paraboloidul hiperbolic intersectează planele (xoz) respectiv $(y0z)$ după parabole cu axa transversală Oz.

Reprezentarea geometrică:



Cuadricele de ecuaţii

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = y, \quad \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = x$$

reprezintă de asemenea paraboloizi hiperbolici.

În finalul acestei secţiuni menţionăm doar faptul că acele cuadrice pentru care există un sistem de axe ortogonale $Oxyz$ faţă de care cuadrica are una din următoarele ecuaţii:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{cilindru eliptic}$$
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{cilindru hiperbolic}$$
$$y^2 = 2px \quad \text{cilindru parabolic}$$
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad \text{con (asimptot pentru } H_1 \text{ şi } H_2)$$
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \quad \text{plane secante}$$
$$x^2 - a^2 = 0 \quad \text{plane paralele}$$
$$x^2 = 0 \quad \text{plane confundate}$$

se numesc *cuadrice degenerate.*

8.3 Suprafeţe riglate

Definiţia 8.3.1 O suprafaţă care poate fi generată prin mişcarea unei drepte D care se sprijină pe o curbă dată se numeşte *suprafaţă riglată*. Dreapta D se numeşte *generatoarea* suprafeţei.

Exemple de suprafeţe riglate sunt date de plan, con, cilindru. Alte două exemple sunt hiperboloidul cu o pânză şi paraboloidul hiperbolic.

Propoziţia 8.3.1 *(i) Hiperboloidul cu o pânză este o suprafaţă dublu riglată (are două generatoare).*

(ii) Paraboloidul hiperbolic este o suprafaţă dublu riglată.

Demonstraţie: (i) Considerăm hiperboloidul $(H_1) : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$

Această ecuaţia se poate scrie sub forma următoare:

$$\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=\left(1-\frac{y}{b}\right)\left(1+\frac{y}{b}\right)$$

Fie familiile de drepte de ecuaţii

$$(D_\lambda):\begin{cases}\dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}=\lambda\left(1-\dfrac{y}{b}\right)\\[2ex] \lambda\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}\right)=1+\dfrac{y}{b}\end{cases},\quad \lambda\in\mathbb{R}$$

$$(D_\mu):\begin{cases}\dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}=\mu\left(1+\dfrac{y}{b}\right)\\[2ex] \mu\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}\right)=1-\dfrac{y}{b}\end{cases}$$

Observăm că $\forall\ \lambda\in\mathbb{R},\ \forall\ \mu\in\mathbb{R},\ D_\lambda, D_\mu\subset H_1$; în concluzie, $(D_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ şi $(D_\mu)_{\mu\in\mathbb{R}}$ sunt familiile de generatoare ale hiperboloidul cu o pânză.

(ii) Fie paraboloidul hiperbolic $(P_h):\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=z$ sau, echivalent,

$$\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)=z$$

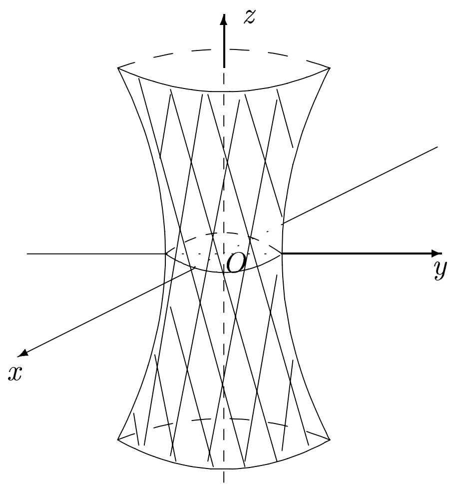
Obţinem două familii de generatoare

$$(D_\lambda):\begin{cases}\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}=\lambda\\[2ex] \lambda\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}\right)=z\end{cases},\quad \lambda\in\mathbb{R}$$

$$(D_\mu):\begin{cases}\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=\mu\\[2ex] \mu\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}\right)=z\end{cases},\quad \mu\in\mathbb{R}$$

Evident, $\forall\ \lambda\in\mathbb{R},\ \forall\ \mu\in\mathbb{R},\ D_\lambda, D_\mu\subset P_h.\diamondsuit$

Pe proprietatea din Propoziţia 8.3.1(i) se bazează posibilitatea de a construi turnuri (coşuri) de beton în formă de hiperboloid cu o pânză, cu cofraje construite din scânduri drepte.



Prin fiecare punct al hiperboloidului cu o pânză H_1 respectiv paraboloidului hiperbolic P_h trece câte o generatoare din fiecare familie; fiecare generatoare dintr-o familie intersectează orice generatoare din cealaltă familie şi orice două generatoare din aceeaşi familie nu se intersectează. Spunem că aceste două familii de drepte formează o *reţea de drepte pe suprafaţa* H_1 respectiv P_h.

Capitolul 9

Curbe plane

9.1 Reprezentări ale unei curbe plane

În acest capitol $I \subset \mathbb{R}$ este un interval închis şi $R = (O, \{\overline{i}, \overline{j}\})$ este un reper cartezian ortonormat. Fie funcţia $h_R : E_2 \longrightarrow V_2, h_R(M) = x\overline{i} + y\overline{j}$, unde x şi y sunt coordonatele carteziene ale punctului M în raport cu reperul dat R.

În prezenţa unui astfel de reper, unei aplicaţii $c : I \to E_2$ i se asociază următoarele funcţii:

$$\begin{aligned}
&x : I \to \mathbb{R},\ t \mapsto x(t)\\
&y : I \to \mathbb{R},\ t \mapsto y(t)\\
&\overline{r} : I \to V_2,\ \overline{r}(t) = x(t)\cdot\overline{i} + y(t)\cdot\overline{j}\\
&r : I \to \mathbb{R}^2,\ r(t) = (x(t), y(t))
\end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[r, mapsto, "c"] & E_2 \arrow[r, mapsto] & V_2 \\
t \arrow[r, mapsto] \arrow[drr, dotted] & c(t) = M \arrow[r, mapsto] & x(t)\cdot\overline{i} + y(t)\cdot\overline{j} = \overline{r}(t) \arrow[d, mapsto] \\
 & & (x(t), y(t)) = r(t) \in \mathbb{R}^2
\end{tikzcd}$$

Aici $x(t)$ şi $y(t)$ notează coordonatele punctului $M = c(t)$ în reperul dat R. Funcţiile x, y se numesc funcţii coordonate (componente) ale funcţiei r respectiv $\overline{r}$.

Imaginea aplicaţiei c în E_2 corespunde noţiunii intuitive de curbă în plan:

traiectoria unui mobil, urma unui spot luminos pe un ecran etc. Această imagine poate fi simplă, ca de exemplu un arc de cerc, sau complicată, cum ar fi o electrocardiograma. Studiul curbelor complicate urmează în mod firesc studiului celor mai simple, iar acesta se poate realiza în anumite condiţii impuse asupra aplicaţiei c, condiţii convenabile din punct de vedere al calculului diferenţial.

Spunem că funcţia r respectiv $\overline{r}$ este de clasă C^k pe intervalul I dacă funcţiile coordonate x şi y sunt de clasă C^k pe I (sunt derivabile şi au derivatele $x', y', \ldots, x^{(k)}, y^{(k)}$ continue pe I).

Dacă funcţia r respectiv $\overline{r}$ este de clasă C^k notăm

$$\frac{d^p r}{dt^p}(t) = r^{(p)}(t) = \left(\frac{d^p x}{dt^p}(t), \frac{d^p y}{dt^p}(t)\right) = (x^{(p)}(t), y^{(p)}(t))$$

$$\frac{d^p \overline{r}}{dt^p}(t) = \overline{r}^{(p)}(t) = x^{(p)}(t)\overline{i} + y^{(p)}(t)\overline{j}$$

Folosind regulile de derivare stabilite la Analiză matematică, se demonstrează:

1. Dacă $\alpha \in C^1(I)$, $\overline{r} \in C^1(I)$, atunci avem:

$$\frac{d}{dt}(\alpha(t) \cdot \overline{r}(t)) = \alpha'(t) \cdot \overline{r}(t) + \alpha(t) \cdot \overline{r}(t), \ \forall t \in I$$

2. Dacă $\overline{r}_1, \overline{r}_2 \in C^1(I)$, atunci avem:

$$\frac{d}{dt}(\overline{r}_1(t) \cdot \overline{r}_2(t)) = \overline{r}_1'(t) \cdot \overline{r}_2(t) + \overline{r}_1(t) \cdot \overline{r}_2'(t), \ \forall t \in I$$

Definiţia 9.1.1 Fie $c : I \to E_2$ şi $r : I \to \mathbb{R}^2$, $r(t) = (x(t), y(t))$, $\forall\ t \in I$, r fiind de clasă C^k, $k \geq 1$. Presupunem că $\left\|\frac{dr}{dt}\right\| \neq 0$, $\forall\ t \in I$ şi r este omeomorfism pe imaginea sa.

O mulţime $\gamma \subset E_2$ se numeşte *arc elementar de curbă* dacă $\gamma = c(I)$. Perechea (I, c) se numeşte *parametrizare* a arcului elementar γ.

În continuare, pentru un punct $M_0 \in \gamma$ astfel încât $M_0 = c(t_0)$, vom folosi următoarea notaţie: $M_0 \in \gamma$ $(t_0 \in I)$.

Observaţia 9.1.1 Fie $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie diferenţiabilă de clasă C^k, $k \geq 1$. Mulţimea $G_f = \{(x, f(x)) |\ x \in I\}$ din plan se numeşte graficul funcţiei f.

Mulţimea G_f este un arc elementar de curbă.

În mod similar, dacă $g : I \to \mathbb{R}$ este o funcţie de clasă C^k, $k \geq 1$, *mulţimea de forma $\{(g(y), y) |\ y \in I\}$ este un arc elementar de curbă.*

Există mulţimi în plan despre care intuiţia ne spune că sunt curbe, dar care nu sunt arce elementare de curbă. În consecinţă, vom da următoarea definiţie:

Definiţia 9.1.2 *Numim curbă în plan o submulţime $\gamma \subset E_2$ cu proprietatea că orice punct al ei aparţine cel puţin unui arc elementar de curbă inclus în această submulţime.*

Nici această definiţie nu acoperă în întregime noţiunea intuitivă de curbă în plan, însă ea delimitează o clasă suficient de amplă.

În continuare vom studia astfel de curbe plane.

Teorema 9.1.1 *Mulţimea* $\{M(x,y) |\ r = r(t),\ r(t) = (x(t), y(t)), t \in I,$ *r- aplicaţie de clasă* $C^k,\ k \geq 1,\ r'(t) \neq 0, t \in I\}$ *este o curbă plană.*

Fără demonstraţie.

Pe baza teoremei de mai sus, pentru o curbă plană vom avea următoarele reprezentări:

$$(\gamma):\ r = r(t),\ t \in I \text{ sau}$$
$$(\gamma):\ \overline{r} = \overline{r}(t),\ t \in I \quad \text{- } \textit{ecuaţia vectorială a curbei } \gamma$$
$$(\gamma): \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases},\ t \in I \quad \text{- } \textit{ecuaţiile parametrice ale curbei } \gamma$$

Să considerăm acum o aplicaţie $F : D \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto F(x,y),\ \ D \subset \mathbb{R}^2$ fiind o mulţime deschisă, iar F - diferenţiabilă de clasă $C^k, k \geq 1$.

Notăm $F_x = \dfrac{\partial F}{\partial x}$ şi $F_y = \dfrac{\partial F}{\partial y}$.

Teorema 9.1.2 *În condiţiile de mai sus, presupunem că* $F_x^2 + F_y^2 > 0,\ \forall (x,y) \in D$. *Dacă mulţimea* $\{M(x,y) |\ F(x,y) = 0,\ \forall (x,y) \in D\}$ *este nevidă, atunci ea este o curbă plană.*

Fără demonstraţie.

Conform acestei teoreme, ecuaţia

$$(\gamma):\ F(x,y) = 0,\ (x,y) \in D, D \subset \mathbb{R}^2 \text{ deschisă}$$

reprezintă ecuaţia unei curbe plane şi ea se numeşte *ecuaţia carteziană implicită a curbei* γ.

Pe baza teoremei funcţiilor implicite, ipoteza $F_y(x_0, y_0) \neq 0$, unde $F(x_0, y_0) = 0$, asigură existenţa unei aplicaţii unice $f : I \to \mathbb{R}$, de clasă

C^k, astfel încât $f(x_0) = y_0$ şi $F(x, f(x)) = 0$, $\forall x \in I$. Atunci mulţimea $\gamma = \{(x, f(x))|\ x \in I\}$ este un arc elementar de curbă. Dacă $F_y(x_0, y_0) = 0$, atunci avem $F_x(x_0, y_0) \neq 0$ şi, la fel ca mai sus, mulţimea $\gamma = \{(g(y), y)|\ y \in J\}$ va fi un arc elementar de curbă.

În concluzie, ecuaţia

$$(\gamma)\ : y = y(x),\ x \in I$$

sau

$$(\gamma)\ : x = x(y),\ y \in J$$

reprezintă ecuaţia unei curbe plane, numită *ecuaţia carteziană explicită a curbei* γ.

Reprezentările: parametrică, implicită şi cea explicită ale unei curbe plane sunt local echivalente, adică orice punct al curbei este conţinut de un arc elementar de curbă pe care se poate trece de la o reprezentare la celelalte două.

Exemplu: Cercul $\gamma = \mathcal{C}((x_0, y_0), R)$ are următoarele reprezentări:

$(\gamma) : \overline{r}(t) = (x_0 + R\cos t)\overline{i} + (y_0 + R\sin t)\overline{j},\ t \in [0, 2\pi]$ - ecuaţia vectorială

$(\gamma) : \begin{cases} x = x_0 + R\cos t \\ y = y_0 + R\sin t \end{cases}$ $t \in [0, 2\pi]$ - ecuaţiile parametrice

$(\gamma) : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2,\ (x, y) \in D$ - ecuaţia implicită

$(\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2) : y = y_0 \pm \sqrt{R^2 - (x - x_0)^2},\ x \in [x_0 - R, x_0 + R]$ - ecuaţia explicită

Definiţia 9.1.3 Fie $\gamma = c(I)$ o curbă plană astfel încât funcţia vectorială asociată r este de clasă $C^k, k \geq 0$.

Se numeşte *schimbare de parametru* pe curba γ orice aplicaţie $h : J \to I$ de clasă C^p, $p \geq k$, $J \subset \mathbb{R}$ fiind un interval închis, astfel încât h să fie inversabilă şi h^{-1} să fie de clasă C^p.

Observaţia 9.1.2 Fie γ o curbă plană ca mai sus şi fie h o schimbare de parametru pe γ. Deoarece $c : I \to E_2$ şi $h : J \to I$, există $c \circ h : J \to E_2$. Prin definiţie $c(I) = \gamma$. Pe de altă parte, $(c \circ h)(J) = c(h(J)) = c(I) = \gamma$. În plus, $c \circ h$ este de clasă C^k, este un omeomorfism pe imaginea sa şi $\left\| \dfrac{d(c \circ h)(s)}{ds} \right\| \neq 0$ pe J. În concluzie, c şi $c \circ h$ definesc aceeaşi curbă plană.

Parametrizarea $(J,\ c \circ h)$ se numeşte *parametrizarea indusă de schimbarea de parametru* h.

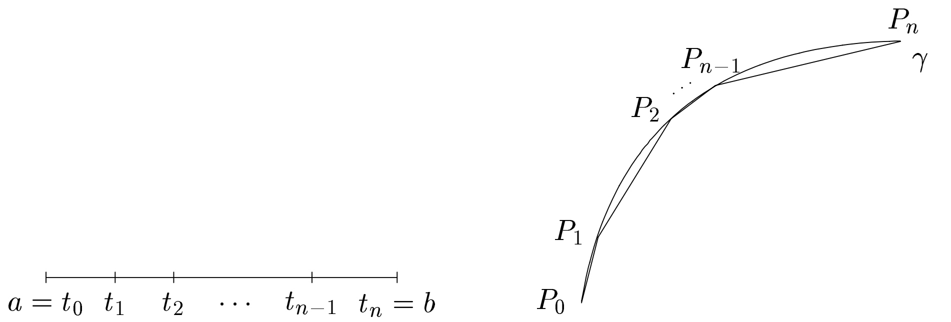
9.2 Parametrizarea canonică (naturală)

Fie $\gamma = c(I)$ o curbă plană având reprezentarea vectorială $r = r(t),\ t \in I$, astfel încât r este de clasă $C^k,\ k \geq 1$.

Să considerăm o diviziune Δ a intervalului $I = [a, b]$:

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$$

şi fie P_i, $i = \overline{0, n}$, punctele de pe curba γ corespunzătoare acestei diviziuni:



Lungimea liniei poligonale $P_0P_1 \ldots P_n$ este

$$l_\Delta = l(P_0P_1 \ldots P_n) = \sum_{i=0}^{n-1} P_iP_{i+1}.$$

Inegalitatea triunghiului ne arată că la o rafinare a acestei diviziuni lungimea l_Δ nu descreşte. Este interesant de studiat dacă mulţimea $\{l_\Delta\}$ este mărginită superior atunci când Δ parcurge mulţimea diviziunilor intervalului $[a, b]$.

Definiţia 9.2.1 Dacă mulţimea $\{l_\Delta\}$ este mărginită superior, spunem că γ are *lungime* sau este rectifiabilă. Marginea superioară a acestei mulţimi se notează cu $l(\gamma)$ şi se numeşte lungimea curbei γ.

Enunţăm, fără a demonstra, următoarea propoziţie:

Propoziţia 9.2.1 *Pentru o curbă plană γ pentru care r este de clasă C^k, $k \geq 1$, numărul $l(\gamma)$ există şi este dat de formulele:*

$$l(\gamma) = \int_a^b \|\overline{r}'(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt,$$

dacă $(\gamma) : \overline{r}(t) = x(t) \cdot \overline{i} + y(t) \cdot \overline{j},\ t \in [a, b]$;

$$l(\gamma) = \int_\alpha^\beta \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx,$$

dacă $(\gamma) : y = y(x),\ x \in [\alpha, \beta]$.

În continuare vom defini o parametrizare specială a unei curbe plane, numită parametrizare naturală sau canonică.

Fie $\gamma = c(I)$ o curbă plană având reprezentarea vectorială $r = r(t),\ t \in I$, astfel încât r este de clasă C^k, $k \geq 1$.

Definim funcţia

$$s : I \to J = [0, l(\gamma)],\ s(t) = \int_a^t \|\overline{r}'(\alpha)\| d\alpha,\ \forall\, t \in I,\ I = [a, b]$$

Observăm că $s(t)$ este lungimea arcului de curbă $\gamma_1 = c([a, t])$.

Deoarece $s'(t) = \|\overline{r}'(t)\| > 0,\ \forall\, t \in I$, rezultă că s este strict crescătoare, deci injectivă. De asemenea, din definiţia funcţiei, $s(I) = J$, deci s este surjectivă. s fiind bijectivă, este inversabilă:

$$\exists\ s^{-1} : J \to I, \quad s^{-1} \overset{not}{=} h$$

Din faptul că $s'(t) > 0,\ \forall\, t \in I$ obţinem că h este derivabilă; în plus, h' şi s' sunt continue.

În concluzie, *h defineşte o schimbare de parametru pe curba γ.*

Definiţia 9.2.2 Parametrizarea definită de aplicaţia $h : J = [0, l(\gamma)] \to I,\ h = s^{-1}$, se numeşte *parametrizarea naturală (canonică)* a curbei γ (parametrul este chiar lungimea arcului).

Teorema următoare, pe care nu o vom demonstra, ne dă o caracterizare a parametrizării naturale pe o curbă:

Teorema 9.2.1 *Fie $\gamma = c(I)$ o curbă plană, având reprezentarea vectorială $r = r(s),\ t \in I$.*

$\overline{r} = \overline{r}(s)$ este parametrizarea canonică pe curba γ dacă şi numai dacă $\left\|\dfrac{d\overline{r}}{ds}\right\| = 1,\ \forall\ s \in I$.

Parametrizarea canonică are o importanţă teoretică deosebită. În practică însă, ea nu este totdeauna uşor de obţinut, aşa încât se operează cu parametrizări care nu satisfac în mod necesar condiţia ca $\dfrac{d\overline{r}}{ds}$ să fie un versor.

În continuare, pentru a face deosebire între parametrizarea canonică şi o parametrizare oarecare a unei curbe, vom folosi următoarele *notaţii:*

$$\frac{d\overline{r}}{ds} = \dot{\overline{r}},\ \frac{d^2\overline{r}}{ds^2} = \ddot{\overline{r}},\ \frac{dx}{ds} = \dot{x} \text{ etc.}$$

Exemplu: Revenim la exemplul analizat anterior, $\gamma = \mathcal{C}((x_0, y_0), R)$, pentru care considerăm ecuaţiile parametrice

$$(\gamma) : \begin{cases} x = x_0 + R\cos t \\ y = y_0 + R\sin t \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi]$$

Funcţia lungime a arcului de cerc este

$$s(t) = \int_0^t \|\overline{r}'(\alpha)\| d\alpha = \int_0^t \sqrt{(x'(\alpha))^2 + (y'(\alpha))^2} d\alpha = Rt$$

iar $J = [0, l(\gamma)] = [0, 2\pi R]$ este codomeniul funcţiei s.

Definim $h : [0, 2\pi R] \to [0, 2\pi]$, $\quad h = s^{-1}$, adică $h(s) = \dfrac{s}{R}$, $\forall s \in [0, 2\pi R]$.

În concluzie, ecuaţiile canonice ale cercului sunt următoarele:

$$(\gamma) : \begin{cases} x = x_0 + R\cos \dfrac{s}{R} \\ \\ y = y_0 + R\sin \dfrac{s}{R} \end{cases}, \quad s \in [0, 2\pi R]$$

Verificăm acum Teorema 9.2.1:

$$\dot{\overline{r}}(s) = -\sin \frac{s}{R} \cdot \overline{i} + \cos \frac{s}{R} \cdot \overline{j}; \quad \|\dot{\overline{r}}(s)\| = 1$$

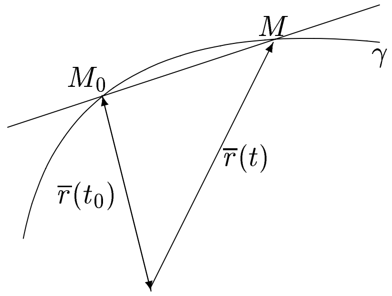
Pe de altă parte, pentru parametrizarea obişnuită a cercului vom avea:

$$\overline{r}'(t) = -R\sin t \cdot \overline{i} + R\cos t \cdot \overline{j}; \quad \|\overline{r}'(t)\| = R$$

9.3 Tangenta şi normala la o curbă plană

Fie curba plană $\gamma = c(I)$ având reprezentarea vectorială $\overline{r} = \overline{r}(t)$, $t \in I$, r fiind de clasă C^k, $k \geq 1$, unde, ca de obicei, avem $\overline{r} : I \to V_2$, $\overline{r}(t) = x(t) \cdot \overline{i} + y(t) \cdot \overline{j}$, $\quad t \in I$.

Fie $M_0 \in \gamma$ ($t_0 \in I$) un punct fixat pe această curbă şi $M \in \gamma$ ($t \in I$) un punct arbitrar al ei.



Definiţia 9.3.1 Poziţia limită a dreptei determinate de punctele M_0 şi M atunci când $t \to t_0$ se numeşte *tangenta* la curba γ în punctul M_0, notată t_{M_0}.

Propoziţia 9.3.1 *Curba plană γ admite în punctul M_0 o tangentă bine determinată, având ecuaţia*

$$(t_{M_0}) : \frac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y'(t_0)}$$

Demonstraţie: Dreapta determinată de punctele M_0 şi M $(t \neq t_0)$ are vectorul de direcţie $\overline{M_0 M} = \overline{r}(t) - \overline{r}(t_0)$; observăm că $\dfrac{\overline{r}(t) - \overline{r}(t_0)}{t - t_0}$ este, de asemenea, un vector de direcţie al acestei drepte. Pe de altă parte, avem

$$\lim_{t \to t_0} \frac{\overline{r}(t) - \overline{r}(t_0)}{t - t_0} = \overline{r}'(t_0).$$

Evident $\|\overline{r}'(t_0)\| \neq 0$. Rezultă că dreapta t_{M_0} este bine determinată, având direcţia

$$\overline{r}'(t_0) = x'(t_0) \cdot \overline{i} + y'(t_0) \cdot \overline{j}$$

iar ecuaţia ei este

$$(t_{M_0}) : \frac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y'(t_0)} \qquad \diamondsuit$$

Observaţia 9.3.1 (i) Fie curba plană $(\gamma) : y = y(x), \ x \in I$ şi fie punctul $M_0(x_0, y_0) \in \gamma$, deci $x_0 \in I$ şi $y_0 = y(x_0)$.

Ecuaţia tangentei la γ în punctul M_0 este

$$(t_{M_0}) : y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$$

(ii) Fie curba plană γ de ecuaţie $F(x, y) = 0, \ (x, y) \in D$ şi fie $(x_0, y_0) \in D$ astfel încât $F(x_0, y_0) = 0$; atunci $M_0(x_0, y_0) \in \gamma$. Ecuaţia tangentei la γ în punctul M_0 este

$$(t_{M_0}) : F_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0$$

Aici am notat

$$F_x(x_0, y_0) = \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) \quad \text{şi} \quad F_y(x_0, y_0) = \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Definiţia 9.3.2 Perpendiculara pe tangenta t_{M_0} la γ în M_0 se numeşte *normala* la γ în punctul M_0 şi se notează n_{M_0}.

Observaţia 9.3.2 Din Propoziţia 9.3.1 şi Observaţia 9.3.1 obţinem că dacă γ are ecuaţiile parametrice $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $t \in I$, atunci normala la γ în punctul M_0, n_{M_0}, are ecuaţia

$$(n_{M_0}) : x'(t_0)(x - x(t_0)) + y'(t_0)(y - y(t_0)) = 0$$

Dacă γ este dată explicit prin ecuaţia $y = y(x),\ x \in I'$, atunci avem

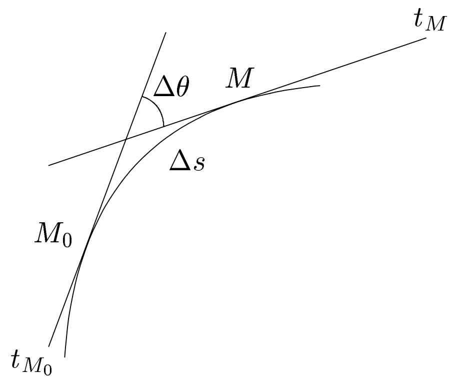
$$(n_{M_0}) : y - y_0 = -\frac{1}{y'(x_0)}(x - x_0)$$

Dacă γ are ecuaţia implicită $F(x, y) = 0,\ (x, y) \in D$, normala n_{M_0} are ecuaţia

$$(n_{M_0}) : F_y(x_0, y_0)(x - x_0) - F_x(x_0, y_0)(y - y_0) = 0.$$

9.4 Curbura unei curbe plane

Fie curba plană $\gamma = c(I)$ r fiind de clasă $C^k,\ k$ - suficient de mare, fie $M_0 \in \gamma$ un punct fixat pe această curbă şi $M \in \gamma$ un punct arbitrar al ei.



Notăm cu $\Delta\theta$ măsura unghiului tangentelor la γ în M_0 şi M iar Δs este lungimea arcului determinat de punctele M_0 şi M.

Definiţia 9.4.1 Se numeşte *curbura* curbei γ în punctul M_0 numărul

$$\lim_{\Delta s \to 0} \left| \frac{\Delta\theta}{\Delta s} \right| \overset{not}{=} k(M_0)$$

iar numărul

$$R(M_0) = \frac{1}{k(M_0)}$$

se numeşte *raza de curbură* a curbei γ în punctul M_0.

Teorema 9.4.1 *Fie γ o curbă plană având reprezentarea vectorială $\overline{r} = \overline{r}(s),\ s \in [0, l(\gamma)]$, cu r de clasă $C^k,\ k \geq 2$.*

Curbura curbei γ în punctul $M_0 \in \gamma$ $(s_0 \in I)$ este dată de formula

$$k(M_0) = \|\ddot{\overline{r}}(s_0)\|.$$

Demonstraţie: $M_0 \in \gamma$ $(s_0 \in I)$ fiind un punct fixat pe curbă, să considerăm un punct arbitrar $M \in \gamma$ $(s_0 + \Delta s),\ \Delta s = s - s_0$.

Tangenta t_{M_0} are versorul director $\overline{t}(s_0) = \dot{\overline{r}}(s_0)$, iar tangenta t_M are versorul director $\overline{t}(s_0 + \Delta s) = \dot{\overline{r}}(s_0 + \Delta s)$.

Fie triunghiul ce are ca laturi aceşti versori, aşezaţi cu originea în punctul M_0. În acest triunghi (isoscel) ducem bisectoarea unghiului de la vârf. Atunci avem:

$$\left|\sin\frac{\Delta\theta}{2}\right| = \frac{\|\overline{t}(s_0 + \Delta s) - \overline{t}(s_0)\|}{2\|\overline{t}(s_0)\|}$$

Ţinând seama de faptul că $\|\overline{t}(s_0)\| = 1$ obţinem

$$\left|\sin\frac{\Delta\theta}{2}\right| = \frac{\|\overline{t}(s_0 + \Delta s) - \overline{t}(s_0)\|}{2}$$

Din această egalitate rezultă

$$\frac{\|\overline{t}(s_0 + \Delta s) - \overline{t}(s_0)\|}{|\Delta s|} = \frac{2\left|\sin\frac{\Delta\theta}{2}\right|}{|\Delta s|} = \left|\frac{\sin\frac{\Delta\theta}{2}}{\frac{\Delta\theta}{2}}\right| \cdot \left|\frac{\Delta\theta}{\Delta s}\right|$$

Trecem la limită şi găsim:

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\|\overline{t}(s_0 + \Delta s) - \overline{t}(s_0)\|}{|\Delta s|} = \lim_{\Delta\theta \to 0}\left|\frac{\sin\frac{\Delta\theta}{2}}{\frac{\Delta\theta}{2}}\right| \cdot \lim_{\Delta s \to 0}\left|\frac{\Delta\theta}{\Delta s}\right|$$

$$\|\dot{\overline{t}}(s_0)\| = k(M_0)$$

Folosind acum faptul că $\overline{t}(s_0) = \dot{\overline{r}}(s_0)$, obţinem $k(M_0) = \|\ddot{\overline{r}}(s_0)\|$. $\diamondsuit$

Propoziţia 9.4.1 *Dacă γ este o curbă plană având ecuaţiile parametrice $x = x(t),\ y = y(t),\ t \in I$, unde x, y sunt de clasă $C^k,\ k \geq 2$, iar $M_0 \in \gamma$ $(t_0 \in I)$, atunci curbura curbei γ în punctul M_0 este dată de formula*

$$k(M_0) = \frac{|x'(t_0)y''(t_0) - x''(t_0)y'(t_0)|}{[(x'(t_0))^2 + (y'(t_0))^2]^{3/2}}.$$

Fără demonstraţie.

Observaţia 9.4.1 (i) Dacă $(\gamma): y = y(x)$, $x \in I$, $M_0 \in \gamma$, $M_0(x_0, y_0)$, din Propoziţia 9.4.1 obţinem

$$k(M_0) = \frac{|y''(x_0)|}{[1 + (y'(x_0))^2]^{3/2}}.$$

Justificarea este următoarea: luăm $x(t) = x$, de unde avem $x' = 1$ şi $x'' = 0$ şi putem nota parametrul cu x.

(ii) Dacă $(\gamma): F(x, y) = 0$, $(x, y) \in D$, $M_0 \in \gamma$, $M_0(x_0, y_0)$, din formula de mai sus avem

$$k(M_0) = \frac{|\Delta|}{(F_x^2(x_0, y_0) + F_y^2(x_0, y_0))^{3/2}}$$

unde am notat

$$\Delta = \begin{vmatrix} F_{xx}(x_0, y_0) & F_{xy}(x_0, y_0) & F_x(x_0, y_0) \\ F_{xy}(x_0, y_0) & F_{yy}(x_0, y_0) & F_y(x_0, y_0) \\ F_x(x_0, y_0) & F_y(x_0, y_0) & 0 \end{vmatrix}$$

Presupunem $F_y \neq 0$. Din $F(x, y) = 0$, $\forall (x, y) \in D$, prin derivare rezultă $F_x + F_y \cdot y' = 0$, de unde avem $y' = -\dfrac{F_x}{F_y}$.

Derivăm încă o dată şi obţinem

$$F_{xx} + F_{xy} \cdot y' + (F_{yx} + F_{yy} \cdot y') \cdot y' + F_y \cdot y'' = 0$$

Înlocuind y' vom avea

$$F_{xx} + 2F_{xy}\left(-\frac{F_x}{F_y}\right) + F_{yy}\left(-\frac{F_x}{F_y}\right)^2 + F_y \cdot y'' = 0$$

sau, echivalent,

$$F_{xx} \cdot F_y^2 - 2F_{xy} \cdot F_x \cdot F_y + F_{yy} \cdot F_x^2 + F_y^3 \cdot y'' = 0$$

De aici rezultă

$$y'' = -\frac{F_{xx} \cdot F_y^2 - 2F_{xy} \cdot F_x \cdot F_y + F_{yy} \cdot F_x^2}{F_y^3}$$

Înlocuim acum în formula dată în Observaţia 9.4.1(i) şi găsim

$$k(M_0) = \frac{|F_{xx} \cdot F_y^2 - 2F_{xy} \cdot F_x \cdot F_y + F_{yy} \cdot F_x^2|}{|F_y^3|} \cdot \frac{1}{\left(1 + \dfrac{F_x^2}{F_y^2}\right)^{3/2}}\Bigg|_{(x_0, y_0)} =$$

$$= \frac{|F_{xx}\cdot F_y^2 - 2F_{xy}\cdot F_x\cdot F_y + F_{yy}\cdot F_x^2|}{|F_y^3|}\cdot \frac{|F_y^3|}{(F_x^2+F_y^2)^{3/2}}\Big|_{(x_0,y_0)} \qquad \diamondsuit$$

O problemă interesantă este determinarea curbelor plane care au curbura constantă. Răspunsul este conţinut în următoarea observaţie:

Observaţia 9.4.2 (i) O curbă plană γ este o dreaptă dacă şi numai dacă $k(M) = 0,\ \forall\ M \in \gamma$.

(ii) O curbă plană γ este un cerc dacă şi numai dacă $k(M) =$ constantă $\neq 0,\ \forall\ M \in \gamma$.

Să justificăm aceste afirmaţii.

(i) Fie dreapta $(\gamma) : y = mx + n$; evident $y' = m$ şi $y'' = 0$. Din Observaţia 9.4.1(i) avem $k(M) = 0,\ \forall\ M \in \gamma$.

Reciproc, presupunem $k(M) = 0,\ \forall\ M \in \gamma$. Folosind din nou Observaţia 9.4.1(i) avem $y'' = 0$, de unde rezultă $y' = C_1$ şi $y = C_1x + C_2,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

În concluzie γ este o dreaptă.

(ii)Dacă γ este cercul $\mathcal{C}((x_0, y_0), r)$, ecuaţiile parametrice sunt

$$(\gamma) : \begin{cases} x = x_0 + r\cos t \\ y = y_0 + r\sin t \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi]$$

Înlocuim acum $x' = -r\sin t,\quad y' = r\cos t,\quad x'' = -r\cos t,\quad y'' = -r\sin t$ în formula din Propoziţia 9.4.1 şi obţinem $k(M) = \dfrac{1}{r} =$ constantă.

Observăm că $R(M) = \dfrac{1}{k(M)} = r$; raza de curbură coincide, în orice punct, cu raza cercului.

Reciproc, presupunem $k(M) =$ constantă $\overset{not}{=} k,\ \forall\ M \in \gamma$.

Presupunem că γ este parametrizată natural:

$$(\gamma) : \overline{r} = \overline{r}(s),\ s \in [0, l(\gamma)],\ \|\dot{\overline{r}}(s)\| = 1$$

adică $(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 = 1$.

Din Propoziţia 9.4.1 avem

$$\frac{|\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}|}{[(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2]^{3/2}} = k$$

de unde rezultă $|\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}| = k$. Considerăm cazul $\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y} > 0$; vom avea $-\ddot{x}\dot{y} + \dot{x}\ddot{y} = k$.

Derivăm în raport cu s egalitatea $(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 = 1$. Obţinem sistemul

$$\begin{cases} -\ddot{x}\dot{y} + \dot{x}\ddot{y} = k \\ \dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} = 0 \end{cases}$$

cu soluţia $\ddot{x} = -k\dot{y}$ şi $\ddot{y} = k\dot{x}$. Prin integrare avem

$$\begin{cases} \dot{x} = -ky + c_1 \\ \dot{y} = kx + c_2 \end{cases}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Înlocuim în $(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 = 1$ şi avem

$$\left(x + \frac{c_2}{k}\right)^2 + \left(y - \frac{c_1}{k}\right)^2 = \left(\frac{1}{k}\right)^2$$

care este ecuaţia unui cerc de rază $r = \dfrac{1}{k}$; observăm că din nou am obţinut $r = \dfrac{1}{k} = \dfrac{1}{k(M)} = R(M), \ \forall\, M \in \gamma$. $\diamondsuit$

Definiţia 9.4.2 Fie curba plană $\gamma = c(I)$. Funcţia

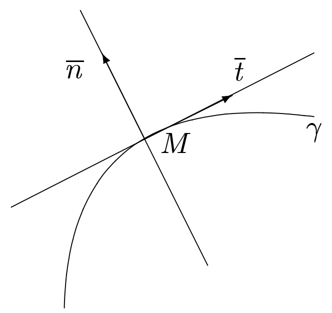
$$k : I \to \mathbb{R}_+, \ t \mapsto k(t) = k(M),$$

unde $M \in \gamma$ $(t \in I)$, se numeşte *funcţia curbură a curbei* γ.

9.5 Reperul Frenet-Serret al unei curbe plane

Fie curba plană γ având ecuaţia vectorială $\overline{r} = \overline{r}(s)$, $s \in [0, l(\gamma)]$, r fiind de clasă C^k, $k \geq 2$, şi $\left\|\dfrac{d\overline{r}}{ds}\right\| = 1$. Versorul tangentei la curbă într-un punct arbitrar $M \in \gamma$ $\ (s \in [0, l(\gamma)])$ este $\overline{t}(s) = \dfrac{\dot{\overline{r}}(s)}{\|\dot{\overline{r}}(s)\|} = \dot{\overline{r}}(s)$.

Fie $\overline{n}(s)$ versorul normalei la curbă în M; alegem sensul lui $\overline{n}(s)$ astfel încât baza $\{\overline{t}, \overline{n}\}$ să fie direct orientată, adică matricea schimbării de baze $\{\overline{i}, \overline{j}\} \mapsto \{\overline{t}, \overline{n}\}$ să aibă determinantul pozitiv.



Versorii $\overline{t}(s)$ şi $\overline{n}(s)$ au expresiile următoare:

$$\begin{cases} \overline{t}(s) = \dot{\overline{r}}(s) = \dot{x}(s)\cdot\overline{i} + \dot{y}(s)\cdot\overline{j} \\ \overline{n}(s) = -\dot{y}(s)\cdot\overline{j} + \dot{x}(s)\cdot\overline{j} \end{cases}$$

De fapt, sistemul de mai sus reprezintă formulele de schimbare a bazelor $\{\overline{i},\overline{j}\} \mapsto \{\overline{t},\overline{n}\}$. Fie $A = \begin{pmatrix} \dot{x}(s) & -\dot{y}(s) \\ \dot{y}(s) & \dot{x}(s) \end{pmatrix}$ matricea asociată acestei schimbări de baze. Evident $\det A = (\dot{x}(s))^2 + (\dot{y}(s))^2 = 1$.

Definiţia 9.5.1 Reperul $R = (M; \{\overline{t}(s), \overline{n}(s)\})$ se numeşte *reperul Frenet-Serret* al curbei plane γ.

Parametrul $s \in [0, l(\gamma)]$ fiind variabil, obţinem un reper mobil pe curba γ.

Teorema 9.5.1 (Formulele Frenet-Serret pentru o curbă plană) *În condiţiile de mai sus, avem:*

$$\begin{cases} \dot{\overline{t}}(s) = k(s)\cdot\overline{n}(s) \\ \dot{\overline{n}}(s) = -k(s)\cdot\overline{t}(s) \end{cases} \qquad s \in [0, l(\gamma)].$$

Aceste formule au o importanţă teoretică deosebită. Ele se utilizează în demonstraţia teoremei următoare, demonstraţie pe care nu o vom prezenta.

Teorema 9.5.2 (Teorema fundamentală a curbelor plane) *Fiind dată o funcţie $k : [0, l(\gamma)] \to \mathbb{R}_+$, $s \mapsto k(s)$, de clasă C^p, $p \geq 0$, există o curbă plană $\gamma = c(I)$ având reprezentarea vectorială $r = r(s)$, pentru care s este lungimea arcului iar k este funcţia curbură a curbei.*

În plus, orice altă curbă pentru care s este lungimea arcului şi k este funcţia de curbură diferă de γ printr-o deplasare rigidă în plan.

9.6 Contactul a două curbe plane

Fie γ_1 şi γ_2 două curbe plane având reprezentările vectoriale $r_1 = r_1(t)$, $r_2 = r_2(t)$, $t \in I$, cu r_1 şi r_2 de clasă C^k, $k \geq n+1$, $n \in \mathbb{N}$ fiind fixat. Presupunem că γ_1 şi γ_2 au un punct comun $M_0(t_0 \in I)$. Aceasta implică $r_1(t_0) = r_2(t_0)$.

Definiţia 9.6.1 Spunem că γ_1 şi γ_2 au în punctul M_0 un *contact de ordinul* n dacă

$$\begin{cases} r_1^{(p)}(t_0) = r_2^{(p)}(t_0),\ p = \overline{0,n} \\ r_1^{(n+1)}(t_0) \neq r_2^{(n+1)}(t_0). \end{cases}$$

Fie acum curbele plane γ_1, γ_2 date prin ecuaţiile carteziene explicite

$$(\gamma_1): \ y = f_1(x), x \in I, \qquad (\gamma): \ y = f_2(x), x \in I.$$

Presupunem că există un punct $M_0(x_0, y_0)$ comun celor două curbe.

Definiţia 9.6.2 Spunem că γ_1 şi γ_2 au în punctul M_0 un *contact de ordinul* n dacă

$$\begin{cases} f_1^{(p)}(x_0) = f_2^{(p)}(x_0), \ p = \overline{0,n} \\ f_1^{(n+1)}(x_0) \neq f_2^{(n+1)}(x_0). \end{cases}$$

Fie γ_1 şi γ_2 curbe plane având ecuaţiile $(\gamma_1): \ x = x(t), \ y = y(t), \ t \in I$ şi $(\gamma_2) \ : F(x, y) = 0$, $(x, y) \in D$. Fie $M_0 \in \gamma_1 \cap \gamma_2$ $(t_0 \in I)$.

Definiţia 9.6.3 Spunem că γ_1 şi γ_2 au în punctul M_0 un *contact de ordinul* n dacă

$$\begin{cases} \dfrac{d^p F}{dt^p}(x(t_0), y(t_0)) = 0, \ p = \overline{0,n} \\ \dfrac{d^{n+1} F}{dt^{n+1}}(x(t_0), y(t_0)) \neq 0. \end{cases}$$

Să considerăm acum curba γ de ecuaţii $x = x(t), \ y = y(t), \ t \in I$ şi fie o familie de curbe ce depinde de $n + 1$ parametri $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n+1} \in \mathbb{R}$, având ecuaţia

$$(\gamma_\lambda) : F(x, y; \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n+1}) = 0, \quad (x, y) \in D$$

Definiţia 9.6.4 Dacă în familia de curbe (γ_λ) există o curbă γ_0 care are cu γ un contact de ordin n într-un punct $M_0 \in \gamma$ $(t_0 \in I)$, atunci γ_0 se numeşte *curbă osculatoare* la γ în M_0.

Observaţia 9.6.1 Dacă o astfel de curbă există, valorile parametrilor $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}$ sunt soluţiile sistemului

$$\frac{d^p F}{dt^p}(x(t_0), y(t_0), ; \lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}) = 0, \quad p = \overline{0,n}.$$

Observaţia 9.6.2 Fie $(D) \ : y = mx + n$ o dreaptă în plan; ecuaţia ei depinde de doi parametri. Fie γ o curbă plană, având ecuaţiile parametrice $x = x(t), \ y = y(t), \ t \in I$. Determinăm dreapta osculatoare la γ; aceasta are un contact de ordinul întâi cu γ.

Fie $t_0 \in I$, $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0)$ şi $M_0(x_0, y_0)$. Condiţiile de contact al lui γ şi D în punctul M_0 sunt

$$\begin{cases} y_0 = mx_0 + n \\ y_0' = mx_0' \end{cases}$$

unde $x'_0 = x'(t_0)$ şi $y'_0 = y'(t_0)$.

Soluţia sistemului este $m = \dfrac{y'_0}{x'_0}$ şi $n = y_0 - \dfrac{y'_0}{x'_0} \cdot x_0$. Înlocuim în ecuaţia dreptei şi avem

$$(D) : y = \frac{y'_0}{x'_0} \cdot x + y_0 - \frac{y'_0}{x'_0} \cdot x_0$$

ecuaţie care se poate scrie sub forma

$$\frac{y - y_0}{y'_0} = \frac{x - x_0}{x'_0}$$

În concluzie, dreapta osculatoare la o curbă γ într-un punct $M_0 \in \gamma$ este tangenta la γ în M_0, t_{M_0}.

Vom determina acum cercul osculator la o curbă dată înt-un punct dat.

Propoziţia 9.6.1 *Fie γ o curbă plană, având ecuaţiile parametrice $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in I$, astfel încât x şi y sunt de clasă C^k, $k \geq 2$.*

Cercul osculator la γ într-un punct $M_0 \in \gamma$ $(t_0 \in I)$ are centrul în punctul de coordonate (a, b) şi raza r date prin formulele

$$a = x_0 - \frac{y'_0({x'_0}^2 + {y'_0}^2)}{x'_0 y''_0 - x''_0 y'_0}, \quad b = y_0 + \frac{x'_0({x'_0}^2 + {y'_0}^2)}{x'_0 y''_0 - x''_0 y'_0}$$

$$r(M_0) = \frac{({x'_0}^2 + {y'_0}^2)^{3/2}}{|x'_0 y''_0 - x''_0 y'_0|}$$

(Am notat $x'_0 = x'(t_0)$ etc.)

Demonstraţie: Fie cercul de ecuaţie $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$; observăm că avem trei parametri (a, b şi r), deci $n = 2$.

Condiţiile de contact de ordinul $n = 2$ între γ şi cerc sunt următoarele:

$$\begin{cases} (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 = r^2 \\ (x_0 - a) \cdot x'_0 + (y_0 - b) \cdot y'_0 = 0 \\ {x'_0}^2 + (x_0 - a) \cdot x''_0 + {y'_0}^2 + (y_0 - b) \cdot y''_0 = 0 \end{cases}$$

Rezolvând acest sistem, găsim a, b şi r ca în enunţ. $\diamondsuit$

Observaţia 9.6.3 Din Definiţia 9.4.1, Propoziţia 9.4.1 şi Propoziţia 9.6.1 rezultă că raza cercului osculator la γ în punctul M_0 şi raza de curbură a curbei γ în M_0 au aceeaşi expresie. Din acest motiv, centrul cercului osculator se mai numeşte şi centru de curbură al curbei γ în punctul M_0.

Capitolul 10

Curbe în spaţiu

10.1 Reprezentări ale unei curbe în spaţiu

Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval închis şi $R = (0, \{\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\})$ un reper cartezian ortonormat. Fie funcţia $h_R : E_3 \longrightarrow V_3, h_R(M) = x\overline{i}+y\overline{j}+z\overline{k}$, x, y, z fiind coordonatele carteziene ale punctului M în raport cu reperul R.

În raport cu un astfel de reper, unei aplicaţii $c : I \to E_3$ i se asociază următoarele funcţii:

$$\begin{aligned}
&x : I \to \mathbb{R},\ \ t \mapsto x(t)\\
&y : I \to \mathbb{R},\ \ t \mapsto y(t)\\
&z : I \to \mathbb{R},\ \ t \mapsto z(t)\\
&\overline{r} : I \to V_3, \quad \overline{r}(t) = x(t)\overline{i} + y(t)\overline{j} + z(t)\overline{k}\\
&r : I \to \mathbb{R}^3, \quad r(t) = (x(t), y(t), z(t))
\end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[r, mapsto] & E_3 \arrow[r, mapsto] & V_3 \\
t \arrow[r, mapsto] \arrow[drr, dotted, mapsto] & c(t) = M \arrow[r, mapsto] & \overline{OM} = x(t)\overline{i} + y(t)\overline{j} + z(t)\overline{k} = \overline{r}(t) \arrow[d, mapsto] \\
 & & (x(t), y(t), z(t)) = r(t) \in \mathbb{R}^3
\end{tikzcd}$$

Am notat cu $x(t), y(t), z(t)$ coordonatele punctului $M = c(t)$ în raport cu reperul fixat R. Funcţiile x, y, z se numesc funcţiile coordonate (componente) ale funcţiei $\overline{r}$ respectiv r.

Funcţia r respectiv $\overline{r}$ este de clasă C^k pe intervalul I dacă funcţiile coordonate x, y şi z sunt de clasă C^k pe I. În acest caz, notăm

$\dfrac{d^p r}{dt^p}(t) = r^{(p)}(t) = \left(\dfrac{d^p x}{dt^p}(t), \dfrac{d^p y}{dt^p}(t), \dfrac{d^p z}{dt^p}(t)\right) = (x^{(p)}(t), y^{(p)}(t), z^{(p)}(t))$

$\dfrac{d^p \overline{r}}{dt^p}(t) = \overline{r}^{(p)}(t) = x^{(p)}(t)\overline{i} + y^{(p)}(t)\overline{j} + z^{(p)}(t)\overline{k}$

Regulilor de derivare stabilite în cazul curbelor plane li se adaugă următoarea:

$$\frac{d}{dt}[\overline{r}_1(t) \times \overline{r}_2(t)] = \overline{r}_1'(t) \times \overline{r}_2(t) + \overline{r}_1(t) \times \overline{r}_2'(t)$$

Definiţia 10.1.1 Fie $c : I \to E_3,\ r : I \to \mathbb{R}^3,\ r(t) = (x(t), y(t), z(t)),\ \forall\, t \in I$, r fiind de clasă $C^k,\ k \geq 1$. Presupunem că $\left\| \dfrac{dr}{dt} \right\| \neq 0,\ \forall\, t \in I$ şi r este omeomorfism pe imaginea sa.

O mulţime $\gamma \subset E_3$ se numeşte *arc elementar de curbă* dacă $\gamma = c(I)$. Perechea (I, c) se numeşte *parametrizare* a arcului elementar γ.

Definiţia 10.1.2 Numim *curbă în spaţiu* o submulţime $\gamma \subset E_3$ cu proprietatea că orice punct al ei aparţine cel puţin unui arc elementar de curbă inclus în această submulţime.

Observaţia 10.1.1 Fie $f, g : I \to \mathbb{R}$ funcţii diferenţiabile de clasă $C^k,\ k \geq 1$. Mulţimea $\gamma = \{M(x, y, z) |\ y = f(x),\ z = g(x),\ x \in I\}$ este curbă în spaţiu. În concluzie, ecuaţiile

$$(\gamma) : \begin{cases} y = f(x) \\ z = g(x) \end{cases}, \quad x \in I$$

reprezintă o curbă în spaţiu şi ele se numesc *ecuaţiile carteziene explicite* ale curbei γ.

În mod similar, ecuaţiile următoare reprezintă curbe în spaţiu:

$$\begin{cases} x = f(y) \\ z = g(y) \end{cases}, \quad x \in I$$

$$\begin{cases} x = f(z) \\ y = g(z) \end{cases}, \quad x \in I$$

Teorema 10.1.1 *Mulţimea* $\{M(x, y, z) |\ r = r(t),\ r(t) = (x(t), y(t), z(t)), t \in I,\ r$*- aplicaţie de clasă* $C^k,\ k \geq 1,\ r'(t) \neq 0, t \in I\}$ *este o curbă în spaţiu.*

Fără demonstraţie.

Conform teoremei de mai sus, pentru o curbă în spaţiu vom avea următoarele reprezentări:

$$(\gamma):\ r = r(t),\ t \in I \text{ sau}$$
$$(\gamma):\ \overline{r} = \overline{r}(t),\ t \in I \quad \text{- } \textit{ecuaţia vectorială a curbei } \gamma$$
$$(\gamma):\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases},\ t \in I \quad \text{- } \textit{ecuaţiile parametrice ale curbei } \gamma$$

Să considerăm acum două aplicaţii

$$F, G : D \to \mathbb{R},\ (x, y, z) \mapsto F(x, y, z),\ (x, y, z) \mapsto G(x, y, z)$$

$D \subset \mathbb{R}^3$ fiind o mulţime deschisă, iar F şi G - diferenţiabile de clasă $C^k, k \geq 1$.

Notăm, ca de obicei, cu F_x, F_y, F_z respectiv G_x, G_y, G_z derivatele parţiale de ordinul întâi ale lui F, G în raport cu x, y, z.

Teorema 10.1.2 *În condiţiile de mai sus, presupunem că* $rang \begin{pmatrix} F_x(x,y,z) & F_y(x,y,z) & F_z(x,y,z) \\ G_x(x,y,z) & G_y(x,y,z) & G_z(x,y,z) \end{pmatrix} = 2,\ \forall\ (x, y, z) \in D.$

Dacă mulţimea $\{M(x, y, z) \in E_3 |\ F(x, y, z) = 0, G(x, y, z) = 0, (x, y) \in D\}$ *este nevidă, atunci ea este o curbă în spaţiu.*

Fără demonstraţie.

Conform acestei teoreme, sistemul de ecuaţii

$$(\gamma):\ \begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases},\quad (x, y) \in D,\ D \subset \mathbb{R}^3 \text{ deschisă}$$

reprezintă o curbă în spaţiu şi ea se numeşte *ecuaţia carteziană implicită a curbei* γ.

Reprezentările: parametrică, implicită şi cea explicită ale unei curbe plane sunt local echivalente.

Schimbarea de parametru pentru o curbă în spaţiu se defineşte la fel ca în cazul curbelor plane.

10.2 Tangenta şi planul normal la o curbă în spaţiu

Fie curba $\gamma = c(I) \subset E_3,\ \overline{r} = \overline{r}(t),\ t \in I$ o reprezentare vectorială a ei, $\overline{r}$ de clasă $C^k,\ k \geq 1$, şi $M_0 \in \gamma$ $(t_0 \in I)$ un punct fixat. Fie $M \in \gamma$ $(t \in I)$ un punct arbitrar.

La fel ca în cazul curbelor plane, tangenta la γ în M_0 este poziţia limită a dreptei M_0M atunci când $t \to t_0$.

Propoziţia 10.2.1 *Curba γ are în M_0 o tangentă bine determinată, având ecuaţiile*

$$(t_{M_0}) : \frac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y'(t_0)} = \frac{z - z(t_0)}{z'(t_0)}.$$

Demonstraţie: Analog Propoziţiei 9.3.1. $\diamondsuit$

Observaţia 10.2.1 (i) Dacă γ este reprezentată explicit, parametrii directori ai tangentei la γ în punctul $M_0 \in \gamma$, unde $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $y_0 = y(x_0)$ iar $z_0 = z(x_0)$, sunt $(1, y'(x_0), z'(x_0))$.

(ii) Dacă γ este reprezentată implicit, parametrii directori ai tangentei t_{M_0} sunt minorii cu semn ai matricei

$$\begin{pmatrix} F_x(x_0, y_0, z_0) & F_y(x_0, y_0, z_0) & F_z(x_0, y_0, z_0) \\ G_x(x_0, y_0, z_0) & G_y(x_0, y_0, z_0) & G_z(x_0, y_0, z_0) \end{pmatrix}$$

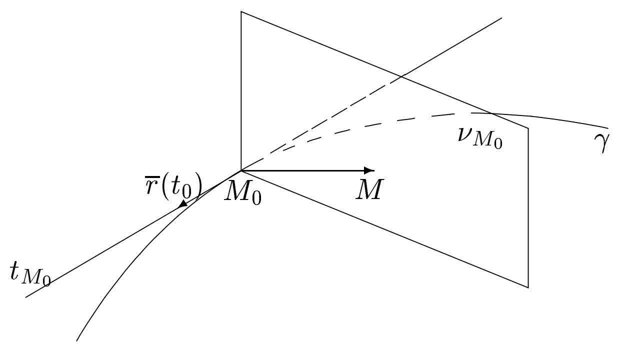
Definiţia 10.2.1 Se numeşte *plan normal* la o curbă γ într-un punct $M_0 \in \gamma$ planul ν_{M_0} perpendicular pe tangenta t_{M_0} în punctul M_0.

Orice dreaptă care trece prin M_0 şi este conţinută în planul normal ν_{M_0} se numeşte *normală* la curba γ în punctul M_0.

Propoziţia 10.2.2 *Planul normal la γ în punctul M_0 are ecuaţia*

$$(\nu_{M_0}) : x'(t_0)(x - x(t_0)) + y'(t_0)(y - y(t_0)) + z'(t_0)(z - z(t_0)) = 0.$$

Demonstraţie:



Condiţia ca un punct M să fie situat în planul normal ν_{M_0} este

$$\overline{M_0M} \perp \overline{r}(t_0)$$

Folosind expresiile vectorilor

$$\overline{M_0M} = (x - x(t_0))\overline{i} + (y - y(t_0))\overline{j} + (z - z(t_0))\overline{k}$$

$$\overline{r}'(t_0) = x'(t_0)\overline{i} + y'(t_0)\overline{j} + z'(t_0)\overline{k}$$

condiţia de ortogonalitate de mai sus devine

$$x'(t_0)(x - x(t_0)) + t'(t_0)(y - y(t_0)) + z'(t_0)(z - z(t_0)) = 0 \quad \diamondsuit$$

10.3 Planul osculator la o curbă în spaţiu

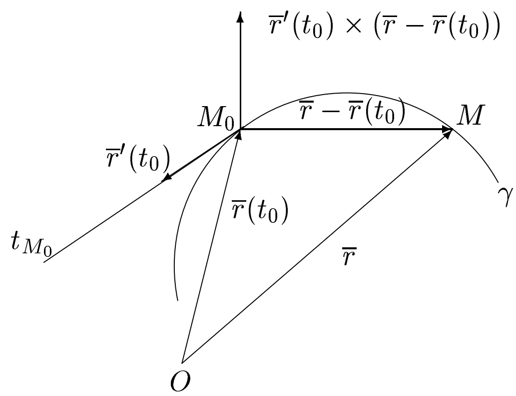
Fie $\gamma = c(I) \subset E_3$ o curbă având ecuaţia vectorială $\overline{r} = \overline{r}(t),\ t \in I$, unde $\overline{r}$ este de clasă $C^k,\ k \geq 0$. Fie $M_0 \in \gamma$ $(t_0 \in I)$ un punct fixat.

Definiţia 10.3.1 Poziţia limită a planului determinat de tangenta t_{M_0} la γ în M_0 şi de un punct $M \in \gamma$ $(t \in I)$ atunci când $t \to t_0$ se numeşte *plan osculator* la curba γ în punctul M_0 şi se notează cu ω_{M_0}.

Propoziţia 10.3.1 *Dacă $k \geq 2$ şi $M_0 \in \gamma$ astfel încât vectorii $\overline{r}'(t_0)$ şi $\overline{r}''(t_0)$ sunt liniar independenţi, atunci curba γ are în M_0 un plan osculator bine determinat, având ecuaţia:*

$$(\omega_{M_0}) : \begin{vmatrix} x - x(t_0) & y - y(t_0) & z - z(t_0) \\ x'(t_0) & y'(t_0) & z'(t_0) \\ x''(t_0) & y''(t_0) & z''(t_0) \end{vmatrix} = 0$$

Demonstraţie:



Observăm că vectorul $\overline{r}'(t_0) \times (\overline{r} - \overline{r}(t_0))$ este normal planului determinat de tangenta t_{M_0} şi punctul M. Scriem formula lui Taylor de ordinul II pentru

$\overline{r}$ în jurul punctului t_0 :

$$\overline{r}(t) = \overline{r}(t_0) + \frac{t-t_0}{1!}\overline{r}'(t_0) + \frac{(t-t_0)^2}{2!}\overline{r}''(t_0) + R_2(\overline{r}, t_0)$$

$$\lim_{t\to t_0} \frac{R_2(\overline{r}, t_0)}{(t-t_0)^2} = \overline{0}.$$

Vectorul normal se poate scrie astfel:
$\overline{r}'(t_0) \times (\overline{r}(t) - \overline{r}(t_0)) = \frac{t-t_0}{1!}\overline{r}'(t_0) \times \overline{r}'(t_0) + \frac{(t-t_0)^2}{2!}\overline{r}'(t_0) \times \overline{r}''(t_0) + \overline{r}'(t_0) \times R_2(\overline{r}, t_0)$

Vectorul următor este, de asemenea, normal planului de mai sus:

$$2!\frac{\overline{r}'(t_0) \times (\overline{r}(t) - \overline{r}(t_0))}{(t-t_0)^2} = \overline{r}'(t_0) \times \overline{r}''(t_0) + 2!\overline{r}'(t_0) \times \frac{R_2(\overline{r}, t_0)}{(t-t_0)^2}$$

Planul osculator va avea vectorul normal

$$\lim_{t\to t_0} 2!\frac{\overline{r}'(t_0) \times (\overline{r}(t) - \overline{r}(t_0))}{(t-t_0)^2} = \overline{r}'(t_0) \times \overline{r}''(t_0) +$$

$$+2! \lim_{t\to t_0} \overline{r}'(t_0) \times \frac{R_2(\overline{r}, t_0)}{(t-t_0)^2} = \overline{r}'(t_0) \times \overline{r}''(t_0) \neq \overline{0}$$

Observăm că direcţia vectorială a planului osculator ω_{M_0} este dată de $\overline{r}'(t_0)$ şi $\overline{r}''(t_0)$. $\diamondsuit$

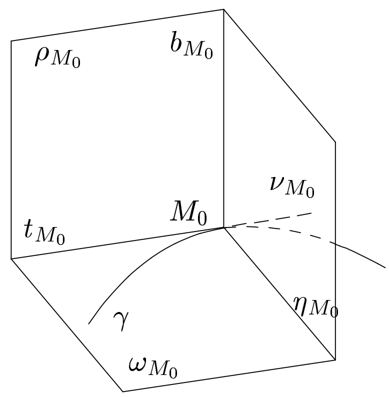
10.4 Triedrul Frenet-Serret al unei curbe în spaţiu

Fie curba $\gamma = c(I) \subset E_3$ având ecuaţia vectorială $\overline{r} = \overline{r}(t),\ t \in I$, unde $\overline{r}$ este de clasă C^k, $k \geq 2$. Fie $M_0 \in \gamma$ $(t_0 \in I)$ astfel încât vectorii $\overline{r}'(t_0)$ şi $\overline{r}''(t_0)$ sunt liniar independenţi.

Definiţia 10.4.1 Dreapta de intersecţie dintre planul normal ν_{M_0} şi planul osculator ω_{M_0} se numeşte *normala principală* la γ în punctul M_0, notată n_{M_0}.

Normala la γ în M_0 perpendiculară pe planul osculator ω_{M_0} se numeşte *binormală* la γ în punctul M_0, notată b_{M_0}.

Planul ce trece prin M_0 şi este perpendicular pe normala principală n_{M_0} se numeşte *plan rectifiant* la γ în punctul M_0, notat ρ_{M_0}.



Definiţia 10.4.2 Triedrul ortogonal având drept muchii tangenta t_{M_0}, normala principală n_{M_0} şi binormala b_{M_0} şi drept feţe planul normal ν_{M_0}, planul osculator ω_{M_0} şi planul rectifiant ρ_{M_0} se numeşte *triedrul mobil Frenet-Serret* asociat curbei γ în punctul M_0.

Observaţia 10.4.1 Tangenta t_{M_0} se orientează în sensul versorului

$$\overline{T}_0 = \frac{\overline{r}'(t_0)}{\|\overline{r}'(t_0)\|}$$

(în sensul creşterii arcului). Binormala b_{M_0} se orientează în sensul versorului

$$\overline{B}_0 = \frac{\overline{r}'(t_0) \times \overline{r}''(t_0)}{\|\overline{r}'(t_0) \times \overline{r}''(t_0)\|}$$

iar normala principală n_{M_0} se orientează astfel încât baza $\{\overline{T}_0, \overline{N}_0, \overline{B}_0\}$ să fie directă, adică $(\overline{T}_0, \overline{N}_0, \overline{B}_0) = 1$. Versorul $\overline{N}_0$ va avea expresia

$$\overline{N}_0 = \overline{B}_0 \times \overline{T}_0 = \frac{[\overline{r}'(t_0) \times \overline{r}''(t_0)] \times \overline{r}'(t_0)}{\|\overline{r}'(t_0) \times \overline{r}''(t_0)\| \cdot \|\overline{r}'(t_0)\|}$$

Definiţia 10.4.3 Reperul $\mathcal{R} = (M_0, \{\overline{T}_0, \overline{N}_0, \overline{B}_0\})$ se numeşte *reperul mobil Frenet-Serret* asociat curbei γ în punctul M_0.

Propoziţia 10.4.1 *Fie curba $\gamma = c(I) \subset E_3$ dată prin ecuaţiile parametrice $x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t),\ t \in I,\ x, y, z$ de clasă $C^k,\ k \geq 2$ şi fie $M_0 \in \gamma(t_0 \in I)$ astfel încât vectorii $\overline{r}'(t_0)$ şi $\overline{r}''(t_0)$ sunt liniar independenţi.*

(i) Ecuaţiile normalei principale sunt

$$(n_{M_0}) : \begin{cases} \begin{vmatrix} x - x(t_0) & y - y(t_0) & z - z(t_0) \\ x'(t_0) & y'(t_0) & z'(t_0) \\ x''(t_0) & y''(t_0) & z''(t_0) \end{vmatrix} = 0 \\ x'(t_0)(x - x(t_0)) + y'(t_0)(y - y(t_0)) + z'(t_0)(z - z(t_0)) = 0 \end{cases}$$

(ii) Notăm cu A_0, B_0, C_0 *minorii cu semn ai matricei*

$$\begin{pmatrix} x'(t_0) & y'(t_0) & z'(t_0) \\ x''(t_0) & y''(t_0) & z''(t_0) \end{pmatrix}.$$

Ecuaţiile binormalei la γ *în* M_0 *sunt*

$$\frac{x - x(t_0)}{A_0} = \frac{y - y(t_0)}{B_0} = \frac{z - z(t_0)}{C_0}$$

(iii) Dacă P_0, Q_0, R_0 *sunt minorii cu semn ai matricei*

$$\begin{pmatrix} x'(t_0) & y'(t_0) & z'(t_0) \\ A_0 & B_0 & C_0 \end{pmatrix}$$

ecuaţia planului rectifiant la γ *în punctul* M_0 *este*

$$P_0(x - x(t_0)) + Q_0(y - y(t_0)) + R_0(z - z(t_0)) = 0$$

Demonstraţie: (i) Avem $n_{M_0} = \nu_{M_0} \cap \omega_{M_0}$. Utilizăm Propoziţia 10.2.2 şi Propoziţia 10.3.1.

(ii) Utilizăm faptul că vectorii $\overline{B}_0$ şi $\overline{r}'(t_0) \times \overline{r}''(t_0)$ sunt coliniari iar vectorul $\overline{r}'(t_0) \times \overline{r}''(t_0)$ are expresia

$$\overline{r}'(t_0) \times \overline{r}''(t_0) = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ x'(t_0) & y'(t_0) & z'(t_0) \\ x''(t_0) & y''(t_0) & z''(t_0) \end{vmatrix} = A_0\overline{i} + B_0\overline{j} + C_0\overline{k}$$

(iii) Direcţia planului rectifiant ρ_{M_0} este dată de vectorii $\{\overline{v}_1, \overline{v}_2\}$, unde $\overline{v}_1$ este coliniar cu $\overline{T}_0$, de exemplu $\overline{v}_1 = \overline{r}'(t_0)$, iar $\overline{v}_2$ este coliniar cu $\overline{B}_0$, de exemplu

$$\overline{v}_2 = \overline{r}'(t_0) \times \overline{r}''(t_0) = A_0\overline{i} + B_0\overline{j} + C_0\overline{k}$$

Ecuaţia planului rectifiant va fi

$$(\rho_{M_0}) : \begin{vmatrix} x - x(t_0) & y - y(t_0) & z - z(t_0) \\ x'(t_0) & y'(t_0) & z'(t_0) \\ A_0 & B_0 & C_0 \end{vmatrix} = 0$$

Folosind P_0, Q_0 şi R_0 obţinem ecuaţia din enunţ. $\diamondsuit$

10.5 Curbura şi torsiunea unei curbe în spaţiu

Definiţia curburii şi a razei de curbură a unei curbe $\gamma \subset E_3$ într-un punct $M_0 \in \gamma$ este aceeaşi ca şi în cazul plan:

$$k(M_0) = \lim_{\Delta s \to 0} \left| \frac{\Delta \theta}{\Delta s} \right|$$
$$R(M_0) = \frac{1}{k(M_0)}$$

Demonstraţia Teoremei 9.4.1 rămâne neschimbată dacă γ este o curbă în spaţiu. În concluzie, dacă $\gamma \subset E_3,\ M_0 \in \gamma\ (s_0 \in [0, l(\gamma)]),\ \overline{r}$ - de clasă C^k, $k \geq 2$, $\|\dot{\overline{r}}(s)\| = 1$, avem

$$k(M_0) = \|\ddot{\overline{r}}(s_0)\|.$$

În cazul în care nu lucrăm cu parametrizarea naturală, formula de calcul a curburii este dată în propoziţia următoare:

Propoziţia 10.5.1 *Fie curba $\gamma = c(I) \subset E_3$ având reprezentarea vectorială $\overline{r} = \overline{r}(t),\ t \in I$, unde $\overline{r}$ este de clasă C^k, $k \geq 2$ şi fie $M_0 \in \gamma (t_0 \in I)$.*

Atunci avem:

$$k(M_0) = \frac{\|\overline{r}'(t_0) \times \overline{r}''(t_0)\|}{\|\overline{r}'(t_0)\|^3}$$

Fie curba γ şi punctul M_0 ca mai sus şi fie un punct $M \in \gamma$ arbitrar. Considerăm planele osculatoare la curba γ în punctele M_0 şi M, ω_{M_0} şi ω_M.

Notăm cu $\Delta\omega$ măsura unghiului planelor ω_{M_0} şi ω_M iar Δs este lungimea arcului curbei γ determinat de M_0 şi M.

Definiţia 10.5.1 Se numeşte *torsiunea* curbei γ în punctul $M_0 \in \gamma$ numărul

$$\tau(M_0) = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta s}.$$

Numărul

$$T(M_0) = \frac{1}{\tau(M_0)}$$

se numeşte *raza de torsiune* a curbei γ în punctul M_0.

Observaţia 10.5.1 (i) Observăm că $\Delta\omega$ este, în acelaşi timp, măsura unghiului binormalelor b_{M_0} şi b_M :

$$\tau(M_0) = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{m\sphericalangle(b_{M_0}, b_M)}{\Delta s}.$$

(ii) Curbura $k(M_0)$ măsoară "abaterea" curbei γ de la tangenta t_{M_0}, iar torsiunea $\tau(M_0)$ măsoară "abaterea" curbei γ de la planul osculator ω_{M_0}. Altfel spus, $k(M_0)$ arată cât de "arcuită" este γ, în timp ce $\tau(M_0)$ arată cât de "răsucită" este ea în punctul M_0.

Teorema 10.5.1 *Fie curba $\gamma = c(I) \subset E_3$ având ecuaţia vectorială $\overline{r} = \overline{r}(s)$, $s \in (0, l(\gamma))$, unde $\overline{r}$ este de clasă C^k, $k \geq 3$, $\|\dot{\overline{r}}(s)\| = 1$. Fie $M_0 \in \gamma(s_0 \in I)$ astfel încât $\ddot{\overline{r}}(s_0) \neq \overline{0}$.*

Atunci avem:

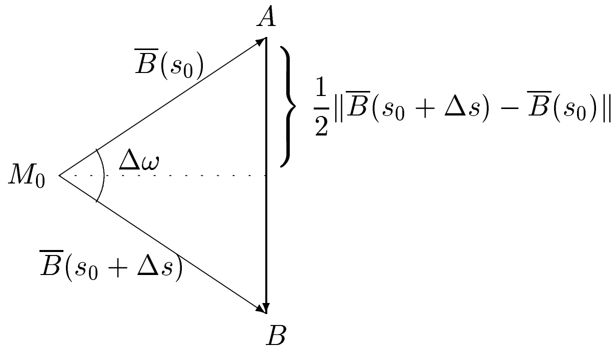
$$\tau(M_0) = \varepsilon \|\dot{\overline{B}}_0\| = \frac{(\dot{\overline{r}}(s_0), \ddot{\overline{r}}(s_0), \dddot{\overline{r}}(s_0))}{\|\ddot{\overline{r}}(s_0)\|^2},$$

unde $\varepsilon = sign(\dot{\overline{r}}(s_0), \ddot{\overline{r}}(s_0), \dddot{\overline{r}}(s_0))$.

Demonstraţie: Fie $M_0 \in \gamma(s_0 \in I)$ şi $M \in \gamma(s_0 + \Delta s \in I)$. Versorii binormalelor la γ în M_0 respectiv M sunt $\overline{B}(s_0)$ respectiv $\overline{B}(s_0 + \Delta s)$.

Considerăm triunghiul isoscel M_0AB, în care avem:

$$\left|\sin \frac{\Delta\omega}{2}\right| = \frac{\frac{1}{2}\|\overline{B}(s_0 + \Delta s) - \overline{B}(s_0)\|}{\|\overline{B}(s_0)\|}$$



Din egalitatea de mai sus obţinem

$$\frac{\|\overline{B}(s_0 + \Delta s) - \overline{B}(s_0)\|}{|\Delta s|} = \left|\frac{\sin \frac{\Delta\omega}{2}}{\frac{\Delta\omega}{2}}\right| \cdot \left|\frac{\Delta\omega}{\Delta s}\right|$$

Trecând la limită cu $\Delta s \to 0$, avem $\|\dot{\overline{B}}(s_0)\| = |\tau(M_0|$.

Pe de altă parte, curba γ fiind parametrizată natural, $\dot{\overline{r}}^2 = 1$. Prin derivare obţinem $\dot{\overline{r}} \cdot \ddot{\overline{r}} = 0$, deci $\dot{\overline{r}} \perp \ddot{\overline{r}}$. Însă $\dot{\overline{r}} = \overline{T}$ este versorul tangentei t_M, $t_M \perp n_M$, $n_M \subset \omega_M$, iar $\dot{\overline{r}}$ şi $\ddot{\overline{r}}$ sunt vectorii de direcţie ai planului osculator ω_M, de unde rezultă că putem alege versorul normalei principale

$$\overline{N} = \frac{\ddot{\overline{r}}}{\|\ddot{\overline{r}}\|} = \frac{\dot{\overline{T}}}{k}$$

(am aplicat aici Teorema 9.4.1 în cazul curbelor în spaţiu). Am obţinut, de fapt, că $\dot{\overline{T}}$ şi $\overline{N}$ sunt coliniari. Baza $\{\overline{T}, \overline{N}, \overline{B}\}$ fiind direct orientată, avem $\overline{B} = \overline{T} \times \overline{N}$. Prin derivare rezultă

$$\dot{\overline{B}} = \dot{\overline{T}} \times \overline{N} + \overline{T} \times \dot{\overline{N}}$$

şi ţinând cont de relaţia $\dot{\overline{T}} = k \cdot N$ avem

$$\dot{\overline{B}} = \overline{T} \times \dot{\overline{N}}.$$

Vom arăta că $\dot{\overline{B}}$ şi $\overline{N}$ sunt coliniari.

Observăm că $\dot{\overline{B}} \cdot \overline{T} = (\overline{T}, \dot{\overline{N}}, \overline{T}) = 0$, deci $\dot{\overline{B}} \perp \overline{T}$, iar $\overline{B}^2 = 1$ implică (prin derivare) $\overline{B} \cdot \dot{\overline{B}} = 0$, deci $\dot{\overline{B}} \perp \overline{B}$. Rezultă că $\dot{\overline{B}}$ este ortogonal planului determinat de t_M şi b_M, adică $\dot{\overline{B}}$ este coliniar cu $\overline{N}$:

$$\frac{\dot{\overline{B}}}{\|\dot{\overline{B}}\|} = \pm\overline{N}$$

Avem $\dot{\overline{B}} \cdot \overline{N} = (\overline{T}, \dot{\overline{N}}, \overline{N})$ şi $\dot{\overline{B}} \cdot \overline{N} = \pm\|\dot{\overline{B}}\| \cdot \overline{N} \cdot \overline{N} = \pm\|\dot{\overline{B}}\|$.

Ţinând cont de egalitatea $|\tau(M)| = \|\dot{\overline{B}}\|$, deducem

$$|\tau(M)| = \|\dot{\overline{B}}\| = |(\overline{T}, \dot{\overline{N}}, \overline{N})| = \left| \left(\dot{\overline{r}}, \frac{\dddot{\overline{r}}}{\|\ddot{\overline{r}}\|}, \frac{\ddot{\overline{r}}}{\|\ddot{\overline{r}}\|} \right) \right| = \frac{\varepsilon(\dot{\overline{r}}, \ddot{\overline{r}}, \dddot{\overline{r}})}{\|\ddot{\overline{r}}\|^2}. \quad \diamondsuit$$

Propoziţia 10.5.2 *Fie $\gamma = c(I)$ o curbă în spaţiu având ecuaţia vectorială $\overline{r} = \overline{r}(t)$, $t \in I$, unde $\overline{r}$ este de clasă C^k, $k \geq 3$. Fie punctul $M_0 \in \gamma(t_0 \in I)$ astfel încât vectorii $\overline{r}'(t_0)$ şi $\overline{r}''(t_0)$ sunt necoliniari.*

Atunci avem:

$$\tau(M_0) = \frac{(\overline{r}'(t_0), \overline{r}''(t_0), \overline{r}'''(t_0))}{\|\overline{r}'(t_0) \times \overline{r}''(t_0)\|^2}.$$

Fără demonstraţie.

Observaţia 10.5.2 În cazul în care curba γ este dată prin ecuaţiile parametrice, formula de calcul a curburii într-un punct $M_0 \in \gamma(t_0 \in I)$ devine

$$k(M_0) = \frac{\sqrt{A_0^2 + B_0^2 + C_0^2}}{[(x'(t_0))^2 + (y'(t_0))^2 + (z'(t_0))^2]^{3/2}}$$

Folosind notaţia

$$\Delta = \begin{vmatrix} x'(t_0) & y'(t_0) & z'(t_0) \\ x''(t_0) & y''(t_0) & z''(t_0) \\ x'''(t_0) & y'''(t_0) & z'''(t_0) \end{vmatrix}$$

pentru calculul torsiunii obţinem formula

$$\tau(M_0) = \frac{\Delta}{A_0^2 + B_0^2 + C_0^2}$$

Definiţia 10.5.2 Fie $\gamma = c(I) \subset E_3$ ca mai sus. Definim *funcţia curbură* a curbei γ

$$k : I \to \mathbb{R}_+, \quad M \mapsto k(t) \overset{def}{=} k(M), \quad M \in \gamma(t \in I)$$

şi *funcţia torsiune* a curbei γ prin

$$\tau : I \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto \tau(t) \overset{def}{=} \tau(M), \quad M \in \gamma(t \in I)$$

Observaţia 10.5.3 (i) Se poate demonstra că funcţia curbură verifică $k = 0$ dacă şi numai dacă $\gamma \subset E_3$ este o dreaptă.

(ii) $\tau = 0 \;\Leftrightarrow\; (\overline{r}'(t), \overline{r}''(t), \overline{r}'''(t)) = 0,\ \forall\, t \in I \;\Leftrightarrow\; \gamma \subset E_3$ este conţinută într-un plan $\Leftrightarrow$ ω_M este acelaşi, în orice punct $M \in \gamma$.

Teorema 10.5.2 (Formulele Frenet-Serret pentru o curbă în spaţiu) *Fie curba $\gamma = c(I) \subset E_3$ având ecuaţia vectorială $\overline{r} = \overline{r}(s)$, $s \in [0, l(\gamma)]$, unde $\overline{r}$ este de clasă C^k, $k \geq 3$, $\|\dot{\overline{r}}(s)\| = 1$, $\ddot{\overline{r}}(s) \neq \overline{0}$. Fie k funcţia curbură a curbei γ şi τ funcţia torsiune a acestei curbe.*

Au loc relaţiile următoare:

$$\begin{cases} \dot{\overline{T}} = k\overline{N} \\ \dot{\overline{N}} = -k\overline{T} + \tau\overline{B} \\ \dot{\overline{B}} = -\tau\overline{N} \end{cases}$$

Demonstraţie: Observăm că în demonstraţia Teoremei 10.5.1 am obţinut prima şi cea de-a treia formulă de mai sus:

$$\dot{\overline{T}} = k \cdot \overline{N} \quad \text{şi} \quad \dot{\overline{B}} = \pm\tau \cdot \overline{N}$$

(vom alege semnul "$-$" în cea de-a doua egalitate).

Prin derivarea egalităţii $\overline{N} = \overline{B} \times \overline{T}$ obţinem

$$\dot{\overline{N}} = \dot{\overline{B}} \times \overline{T} + \overline{B} \times \dot{\overline{T}}$$

iar acum înlocuim $\dot{\overline{B}}$ şi $\dot{\overline{T}}$ din formulele de mai sus şi avem

$$\dot{\overline{N}} = (-\tau\overline{N}) \times \overline{T} + \overline{B} \times (k\overline{N}) = \tau\overline{B} - k\overline{T}$$

Am demonstrat astfel şi cea de-a doua dintre formulele Frenet- Serret. $\diamondsuit$

Observaţia 10.5.4 Fie curba $\gamma = c(I) \subset E_3$ de ecuaţie vectorială $\overline{r} = \overline{r}(t), t \in I$, unde $\overline{r}$ este de clasă C^k, $k \geq 3$.

Formulele Frenet-Serret se pot scrie astfel:

$$\begin{cases} \overline{T}' = \|\overline{r}'\| \cdot k \cdot \overline{N} \\ \overline{N}' = \|\overline{r}'\|(-k \cdot \overline{T} + \tau \cdot \overline{B}) \\ \overline{B}' = -\|\overline{r}'\| \cdot \tau \cdot \overline{N} \end{cases}$$

În continuare prezentăm interpretarea cinematică a formulelor lui Frenet-Serret.

(i) Fie un punct material a cărui traiectorie este curba γ de ecuaţie vectorială $\overline{r} = \overline{r}(t)$, $t \in I$, t fiind timpul. Acestui punct îi asociem:

- vectorul viteză $\overline{v}(t) = \overline{r}'(t)$

- vectorul acceleraţie $\overline{a}(t) = \overline{v}'(t) = \overline{r}''(t)$

La momentul t, vectorii $\overline{v}(t)$ şi $\overline{a}(t)$ se află în planul osculator ω_M asociat curbei γ în punctul $M \in \gamma(t \in I)$.

(ii) Fie un corp rigid care se mişcă în jurul unui punct fix; fixăm un punct al acestuia. Notăm cu γ traiectoria acestui punct.

Există o axă instantanee de rotaţie situată în planul rectifiant ρ_M al punctului $M \in \gamma(t \in I)$; direcţia acestui axe este dată de vectorul Darboux

$$\overline{\omega} = \tau\overline{T} + k\overline{B}$$

k fiind funcţia curbură a curbei γ, iar τ funcţia torsiune.

Au loc relaţiile următoare:

$$\begin{cases} \dot{\overline{r}} = \overline{T} = \overline{\omega} \times \overline{r} \\ \dot{\overline{T}} = \overline{\omega} \times \overline{T} \\ \dot{\overline{N}} = \overline{\omega} \times \overline{N} \\ \dot{\overline{B}} = \overline{\omega} \times \overline{B} \end{cases}$$

Formulele Frenet- Serret au o mare importanţă teoretică, ele fiind utilizate pentru a demonstra următoarea teoremă:

Teorema 10.5.3 (Teorema fundamentală a curbelor în spaţiu) *Fie* $I \subset \mathbb{R}$ *un interval,* $k, \tau : I \to \mathbb{R}$ *funcţii continue pe* I *astfel încât* $k(s) \geq 0,\ \forall\ s \in I$.

Există o curbă în spaţiu $\gamma = c(I) \subset E_3$ *având ecuaţia vectorială* $\overline{r} = \overline{r}(s)$, $s \in I$, *cu* $\overline{r}$ *de clasă* $C^k,\ k \geq 3$, *astfel încât* s *este parametrul natural, iar* k, τ *sunt funcţiile curbură respectiv torsiune ale curbei* γ.

În plus, orice altă curbă cu ecuaţia vectorială $\overline{r}_1 = \overline{r}_1(t)$ *având proprietăţile de mai sus diferă de* γ *printr-o deplasare rigidă în spaţiu.*

Altfel spus, funcţiile curbură şi torsiune ale unei curbe determină în mod unic curba abstracţie făcând de schimbarea parametrului şi a reperului.

Capitolul 11

Suprafeţe

11.1 Reprezentări ale unei suprafeţe

În acest capitol vom considera că $R = (O, \{\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\})$ este un reper cartezian ortonormat orientat direct. Fie funcţia $h_R : E_3 \longrightarrow V_3, h_R(M) = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}$, x, y, z fiind coordonatele carteziene ale punctului M în raport cu reperul ales R. Dacă $D \subseteq \mathbb{R}^2$, în raport acest reper unei aplicaţii $s : D \to E_3$ i se asociază funcţiile următoare:

$$\begin{aligned}
&x : D \to \mathbb{R}, \quad (u, v) \mapsto x(u, v)\\
&y : D \to \mathbb{R}, \quad (u, v) \mapsto y(u, v)\\
&z : D \to \mathbb{R}, \quad (u, v) \mapsto z(u, v)\\
&\overline{r} : D \to V_3, \quad \overline{r}(u, v) = x(u, v)\overline{i} + y(u, v)\overline{j} + z(u, v)\overline{k}\\
&r : D \to \mathbb{R}^3, \quad r(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))
\end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[r, mapsto, "s"] & E_3 \arrow[r, mapsto] & V_3 \\
(u,v) \arrow[r, mapsto] \arrow[drr, dotted] & s(u,v) = M \arrow[r, mapsto] & \overline{OM} = x(u,v)\overline{i} + y(u,v)\overline{j} + z(u,v)\overline{k} \arrow[d, mapsto] \\
 & & (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \in \mathbb{R}^3
\end{tikzcd}$$

Am notat cu $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ coordonatele punctului $M = s(u, v)$ în raport cu reperul R.

Funcţiile x, y, z se numesc funcţii coordonate (componente) ale funcţiei $\overline{r}$ respectiv r. Funcţia $\overline{r}$ este de clasă C^k pe D, $k \geq 0$, dacă funcţiile coordonate

x, y, z sunt de clasă C^k pe D (admit derivate parţiale continue pe D până la ordinul k inclusiv).

În acest capitol vom utiliza notaţiile următoare:

$$x_u = \frac{\partial x}{\partial u}; \quad x_v = \frac{\partial x}{\partial v}; \quad y_u = \frac{\partial y}{\partial u} \quad \text{etc.}$$
$$x_{uu} = \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}; \quad x_{uv} = \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} \quad \text{etc.}$$
$$\overline{r}_u = \frac{\partial \overline{r}}{\partial u} = x_u \cdot \overline{i} + y_u \cdot \overline{j} + z_u \cdot \overline{k}$$
$$\overline{r}_v = \frac{\partial \overline{r}}{\partial v} = x_v \cdot \overline{i} + y_v \cdot \overline{j} + z_v \cdot \overline{k}$$
$$\overline{r}_{uu} = \frac{\partial^2 \overline{r}}{\partial u^2} = x_{uu} \cdot \overline{i} + y_{uu} \cdot \overline{j} + z_{uu} \cdot \overline{k} \quad \text{etc.}$$

Definiţia 11.1.1 Fie $s : D \to E_3,\ D \subseteq \mathbb{R}^2$ mulţime deschisă, $r : D \to \mathbb{R}^3$, unde $r(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$, iar funcţia r este de clasă $C^k,\ k \geq 1$. Numim *suprafaţă elementară* în spaţiul E_3 o submulţime $\sigma = s(D)$, unde $\|\overline{r}_u \times \overline{r}_v\| \neq 0,\ \forall\ (u,v) \in D$, iar $r : D \to \mathbb{R}^3$ este omeomorfism pe imaginea sa. Perechea (D, s) se numeşte *parametrizare* pe suprafaţa elementară σ.

Definiţia 11.1.2 O submulţime σ în E_3 se numeşte *suprafaţă* dacă orice punct al ei aparţine cel puţin unei suprafeţe elementare conţinută în σ.

Fie acum $D' \subseteq \mathbb{R}^2$ o mulţime deschisă şi aplicaţia bijectivă $h : D' \to D$ având ecuaţiile $u = u(\widetilde{u}, \widetilde{v}),\ v = v(\widetilde{u}, \widetilde{v}),\ (\widetilde{u}, \widetilde{v}) \in D'$, astfel încât

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial \widetilde{u}} & \frac{\partial u}{\partial \widetilde{v}} \\ \frac{\partial v}{\partial \widetilde{u}} & \frac{\partial v}{\partial \widetilde{v}} \end{vmatrix} \neq 0,\ \forall (\widetilde{u}, \widetilde{v}) \in D'.$$

Observaţia 11.1.1 Fie σ o suprafaţă elementară cu parametrizarea (D, s) şi fie h ca mai sus. Perechea $(D', s \circ h)$ este o nouă parametrizare a suprafeţei elementare σ.

Ne vom ocupa acum de reprezentările unei suprafeţe.

Fie $D \subseteq \mathbb{R}^2$ o mulţime deschisă şi o funcţie $f : D \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto f(x,y)$. Graficul lui f este mulţimea $G_f = \{(x, y, f(x,y)) |\ (x,y) \in D\}$.

Teorema 11.1.1 *Dacă funcţia f este de clasă $C^k,\ k \geq 1$, atunci graficul ei G_f este o suprafaţă elementară în E_3.*

Fără demonstraţie.

De asemenea, mulţimile $\{(x, f(x,z), z)|\ (x,z) \in D\}$, unde $f : D \to \mathbb{R}^2$, $(x,z) \mapsto f(x,z)$ este de clasă C^k, $k \geq 1$ respectiv $\{(f(y,z), y, z)|\ (y,z) \in D\}$, $f : D \to \mathbb{R}^2$, $(y,z) \mapsto f(y,z)$ de clasă C^k, $k \geq 1$, sunt suprafeţe elementare în E_3.

Pe baza acestei teoreme putem spune că ecuaţia

$$(\sigma):\ z = z(x,y), \quad (x,y) \in D \subseteq \mathbb{R}^2 \text{ deschisă}$$

reprezintă o suprafaţă. Aceasta se numeşte *ecuaţia explicită* a suprafeţei σ.

Teorema 11.1.2 *Mulţimea* $\{M(x,y,z)|\ r = r(u,v),\ (u,v) \in D,\ r(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)),\ r$ *- de clasă* $C^k,\ k \geq 1,\ \|\overline{r}_u \times \overline{r}_v\| \neq 0,\ \forall\ (u,v) \in D\}$ *este o suprafaţă în* E_3.

Fără demonstraţie.

În concluzie, în condiţiile teoremei de mai sus, pentru o suprafaţă din E_3 putem avea următoarele reprezentări:

$$(\sigma):\ \overline{r} = \overline{r}(u,v),\ (u,v) \in D$$
$$(\sigma):\ r = r(u,v),\ (u,v) \in D \ \textit{ecuaţia vectorială}$$
$$(\sigma):\ \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases},\ (u,v) \in D \ \textit{ecuaţiile parametrice}$$

Să considerăm acum o funcţie $F : D \to \mathbb{R}$ de clasă C^k, $k \geq 1$, D fiind o mulţime deschisă din $\mathbb{R}^3$.

Teorema 11.1.3 *Dacă mulţimea* $\sigma = \{M(x,y,z)|\ F(x,y,z) = 0,\ F$ *de clasă* $C^k,\ k \geq 1,\ D \subseteq \mathbb{R}^3$ *deschisă*, $F_x^2 + F_y^2 + F_z^2 > 0,\ \forall\ (x,y,z) \in D\}$ *este nevidă, atunci ea este o suprafaţă în* E_3.

Fără demonstraţie.

Conform acestei teoreme, ecuaţia

$$(\sigma):\ F(x,y,z) = 0,\ (x,y,z) \in D,\ F_x^2 + F_y^2 + F_z^2 > 0,\ D \subset \mathbb{R}^3 \text{ deschisă}$$

reprezintă o suprafaţă în E_3 şi numim aceasta *ecuaţia implicită* a suprafeţei σ.

Cele trei reprezentări: explicită, parametrică şi implicită ale unei suprafeţe sunt echivalente.

11.2 Curbe pe o suprafaţă

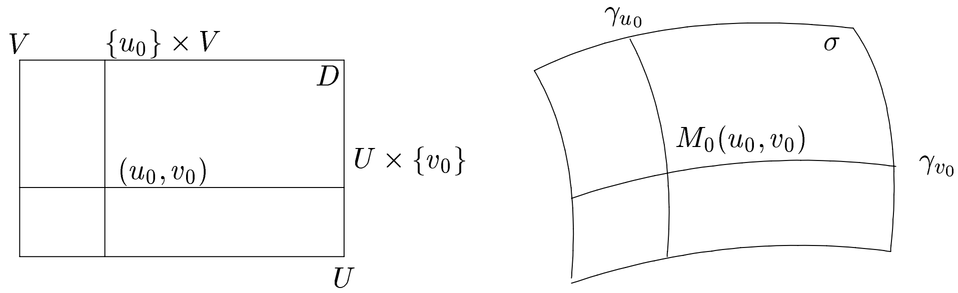
Fie suprafaţa $\sigma = s(D)$, unde $D = U \times V$. Fie $(u_0, v_0) \in D$ fixat. Considerăm mulţimile
$\{(u, v_0) \in D |\ u \in U\} = U \times \{v_0\}$
$\{(u_0, v) \in D |\ v \in V\} = \{u_0\} \times V$
şi aplicaţiile parţiale

$$s_{v_0} : U \to E_3, \quad s_{v_0}(u) = s(u, v_0)$$

$$s_{u_0} : V \to E_3, \quad s_{u_0}(v) = s(u_0, v)$$

Notăm $\gamma_{v_0} = s_{v_0}(U)$, $\gamma_{u_0} = s_{u_0}(V)$ şi observăm că γ_{v_0} şi γ_{u_0} sunt curbe situate pe suprafaţa σ.

Definiţia 11.2.1 Curbele γ_{v_0} şi γ_{u_0} de pe suprafaţa σ se numesc *curbe de coordonate* (u) respectiv (v) pe σ. (u_0, v_0) se numesc *coordonate curbilinii* ale punctului $M_0 = s(u_0, v_0)$.



Aceste curbe au următoarele ecuaţii parametrice:

$$(\gamma_{v_0}) : \begin{cases} x = x(u, v_0) = X(u) \\ y = y(u, v_0) = Y(u) \\ z = z(u, v_0) = Z(u) \end{cases}, \quad u \in U$$

$$(\gamma_{u_0}) : \begin{cases} x = x(u_0, v) = \widetilde{X}(v) \\ y = y(u_0, v) = \widetilde{Y}(v) \\ z = z(u_0, v) = \widetilde{Z}(v) \end{cases}, \quad v \in V$$

Pentru diferite valori ale parametrului $v : v_0, v_1, \ldots$ respectiv $u : u_0, u_1, \ldots$ obţinem două familii de curbe de coordonate pe σ :

$$(\gamma_{v_i})_{i \in I} : \ \gamma_{v_0}, \gamma_{v_1}, \ldots$$
$$(\gamma_{u_j})_{j \in J} : \ \gamma_{u_0}, \gamma_{u_1}, \ldots$$

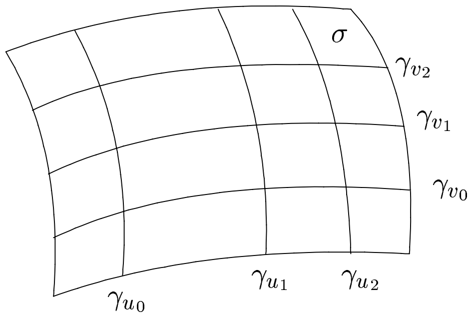
Acestea au proprietăţile următoare:

$\forall\ M_0(u_0, v_0) \in \sigma,\ \exists \gamma_{v_0}, \gamma_{u_0} \subset \sigma$ unice astfel încât $M_0 \in \gamma_{v_0}$, $M_0 \in \gamma_{u_0}$

$\gamma_{v_i} \cap \gamma_{v_j} = \emptyset;\ \gamma_{u_i} \cap \gamma_{u_j} = \emptyset,\ \forall\ i \neq j$

$\gamma_{v_i} \cap \gamma_{u_j} = \{M(u_j, v_i)\},\ \forall\ (i, j) \in I \times J$

De aceea, spunem că $(\gamma_{v_i})_{i \in I}$ şi $(\gamma_{u_j})_{j \in J}$ formează o *reţea de curbe de coordonate* pe suprafaţa σ.



Observaţia 11.2.1 Observăm că $\overline{r}_u(u_0, v_0)$ este vectorul de direcţie al tangentei la γ_{v_0} în M_0, iar $\overline{r}_v(u_0, v_0)$ este vectorul de direcţie al tangentei la γ_{u_0} în punctul M_0.

11.3 Planul tangent şi normala la o suprafaţă

Fie suprafaţa $\sigma = s(D) \subset E_3$, având reprezentarea vectorială

$$\overline{r} = \overline{r}(u, v),\ (u, v) \in D$$

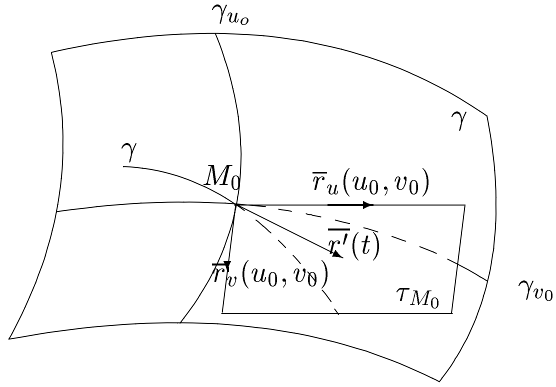
şi fie $M_0(u_0, v_0)$ un punct pe această suprafaţă. Considerând u şi v funcţii de acelaşi parametru, adică $u = u(t)$, $v = v(t)$, $t \in I$, punctul $M(u(t), v(t))$ va descrie o curbă $\gamma \subset \sigma$, având ecuaţia vectorială

$$(\gamma) : \overline{r} = \overline{r}(u(t), v(t)), \quad t \in I.$$

Considerăm acum toate curbele de pe suprafaţa σ care trec prin punctul M_0. Vectorul de direcţie al tangentei la o astfel de curbă este

$$\overline{r}'(t) = \overline{r}_u \cdot u'(t) + \overline{r}_v \cdot v'(t).$$

Evident, vectorii $\overline{r}_u, \overline{r}_v$ şi $\overline{r}'(t)$ sunt coplanari.



Definiţia 11.3.1 Se numeşte *plan tangent* la suprafaţa σ în punctul M_0 planul ce trece prin M_0 şi are direcţia dată de vectorii $\overline{r}_u(u_0,v_0)$ şi $\overline{r}_v(u_0,v_0)$. Vom nota acest plan cu τ_{M_0}.

Propoziţia 11.3.1 *(i) Dacă suprafaţa σ are ecuaţia vectorială $\overline{r}=\overline{r}(u,v)$, $(u,v)\in D$, ecuaţia vectorială a planului τ_{M_0} este*

$$\overline{r}=\overline{r}(u_0,v_0)+\lambda\overline{r}_u(u_0,v_0)+\mu\overline{r}_v(u_0,v_0),\quad \lambda,\mu\in\mathbb{R}$$

(ii) Dacă suprafaţa σ are ecuaţiile parametrice $x=x(u,v), y=y(u,v)$, $z=z(u,v)$, $(u,v)\in D$, ecuaţia planului τ_{M_0} este

$$\begin{vmatrix} x-x(u_0,v_0) & y-y(u_0,v_0) & z-z(u_0,v_0) \\ x_u(u_0,v_0) & y_u(u_0,v_0) & z_u(u_0,v_0) \\ x_v(u_0,v_0) & y_v(u_0,v_0) & z_v(u_0,v_0) \end{vmatrix}=0$$

(iii) Dacă suprafaţa σ are reprezentarea explicită $z=z(x,y)$, $(x,y)\in D_2\subset\mathbb{R}^2$, ecuaţia planului τ_{M_0} este

$$p_0(x-x_0)+q_0(y-y_0)-(z-z_0)=0$$

unde $p_0=\dfrac{\partial z}{\partial x}(x_0,y_0)$, iar $q_0=\dfrac{\partial z}{\partial y}(x_0,y_0)$.

(iv) Dacă suprafaţa σ este dată prin ecuaţia implicită $F(x,y,z)=0$, $(x,y,z)\in D_3\subset\mathbb{R}^3$, ecuaţia planului τ_{M_0} este

$$F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0.$$

Definiţia 11.3.2 *Normala* la suprafaţa σ în punctul $M_0\in\sigma$ este dreapta perpendiculară pe planul tangent τ_{M_0} în punctul M_0.

Vom nota această dreaptă cu n_{M_0}.

Propoziţia 11.3.2 *(i) Dacă suprafaţa* σ *are ecuaţia vectorială* $\overline{r} = \overline{r}(u, v)$, $(u, v) \in D$, *ecuaţia vectorială a dreptei* n_{M_0} *este*

$$\overline{r} = \overline{r}(u_0, v_0) + \lambda[\overline{r}_u(u_0, v_0) \times \overline{r}_v(u_0, v_0)], \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

(ii)Dacă suprafaţa σ *are ecuaţiile parametrice* $x = x(u, v), y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$, $(u, v) \in D$, *ecuaţiile canonice ale dreptei* n_{M_0} *sunt*

$$\frac{x - x(u_0, v_0)}{A_0} = \frac{y - y(u_0, v_0)}{B_0} = \frac{z - z(u_0, v_0)}{C_0}$$

(iii) Dacă suprafaţa σ *are reprezentarea explicită* $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D_2 \subset \mathbb{R}^2$, *ecuaţiile dreptei* n_{M_0} *sunt*

$$\frac{x - x_0}{p_0} = \frac{y - y_0}{z_0} = \frac{z - z_0}{-1}$$

(iv) Dacă suprafaţa σ *este dată prin ecuaţia implicită* $F(x, y, z) = 0$, $(x, y, z) \in D_3 \subset \mathbb{R}^3$, *ecuaţiile dreptei* n_{M_0} *sunt*

$$\frac{x - x_0}{F_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F_z(x_0, y_0, z_0)}$$

Demonstraţiile Propoziţiilor 11.3.1 şi 11.3.2 sunt simple exerciţii.

11.4 Prima formă fundamentală a unei suprafeţe

Fie $\sigma = s(D)$ o suprafaţă din E_3, având ecuaţia vectorială $\overline{r} = \overline{r}(u, v)$, $(u, v) \in D \subset \mathbb{R}^2$, cu $\overline{r}$ de clasă C^k, $k \geq 1$.

Definiţia 11.4.1 Se numeşte *prima formă fundamentală* a suprafeţei σ sau *metrica suprafeţei* σ forma diferenţială

$$d\overline{r}^2 \overset{not}{=} \phi \overset{not}{=} ds^2.$$

Teorema 11.4.1 *Metrica* ϕ *a suprafeţei* σ *este o formă pătratică pozitiv definită în diferenţialele du şi dv ale coordonatelor curbilinii, care are expresia*

$$\phi = E(u, v)du^2 + 2F(u, v)dudv + G(u, v)dv^2$$

unde funcţiile $E, F, G : D \to \mathbb{R}$, *de clasă* C^{k-1}, *numite coeficienţii metricii* ϕ, *sunt definite astfel:*

$$\begin{aligned} E(u, v) =& \overline{r}_u^2 = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2 \\ F(u, v) =& \overline{r}_u \cdot \overline{r}_v = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v \\ G(u, v) =& \overline{r}_v^2 = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2 \end{aligned}$$

Demonstraţie: Din ecuaţia vectorială a suprafeţei σ, $\overline{r} = \overline{r}(u, v)$, unde $(u, v) \in D$, avem $d\overline{r} = \overline{r}_u du + \overline{r}_v dv$. Calculăm

$$d\overline{r}^2 = \overline{r}_u^2 du^2 + 2\overline{r}_u \overline{r}_v du dv + \overline{r}_v^2 dv^2,$$

de unde rezultă

$$E(u, v) = \overline{r}_u^2, \quad F(u, v) = \overline{r}_u \cdot \overline{r}_v \quad \text{şi} \quad G(u, v) = \overline{r}_v^2.$$

Observăm că pentru forma pătratică de mai sus avem

$$\Delta = \begin{vmatrix} \overline{r}_u^2 & \overline{r}_u \cdot \overline{r}_v \\ \overline{r}_u \cdot \overline{r}_v & \overline{r}_v^2 \end{vmatrix} = \overline{r}_u^2 \cdot \overline{r}_v^2 - (\overline{r}_u \cdot \overline{r}_v)^2 = \|\overline{r}_u \times \overline{r}_v\|^2 > 0$$

de unde rezultă că ϕ este pozitiv definită. $\Diamond$

Reţinem următorul fapt:

$$\Delta = EG - F^2 = \|\overline{r}_u \times \overline{r}_v\|^2 > 0$$

Observaţia 11.4.1 Dacă suprafaţa σ are ecuaţia explicită $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$, notăm, ca de obicei, $p = \dfrac{\partial z}{\partial x}$, $q = \dfrac{\partial z}{\partial y}$.

Coeficienţii metricii suprafeţei σ sunt

$$E = 1 + p^2, \quad F = pq, \quad G = 1 + q^2$$

iar metrica suprafeţei va avea expresia

$$\phi = (1 + p^2)dx^2 + 2pq dx dy + (1 + q^2)dy^2.$$

Ne vom ocupa acum de unele aplicaţii ale primei forme fundamentale.

Fie curba γ situată pe suprafaţa σ, γ fiind dată prin ecuaţiile parametrice în coordonate curbilinii $u = u(t),\ v = v(t),\ t \in I$. În concluzie, ecuaţia vectorială a curbei γ va fi

$$(\gamma) : \overline{r} = \overline{r}(u(t), v(t)),\ t \in I$$

Fie două puncte $M_1 \in \gamma(t_1 \in I)$, $M_2 \in \gamma(t_2 \in I)$.

Vom calcula lungimea arcului $\widetilde{\gamma} = \gamma|_{M_1 M_2}$ de pe curba γ determinat de aceste două puncte. Utilizăm

$$l(\widetilde{\gamma}) = \int_{t_1}^{t_2} \|\overline{r}'(t)\| dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(\overline{r}'(t))^2} dt$$

$$\overline{r}'(t) = \overline{r}_u \cdot \frac{du}{dt} + \overline{r}_v \cdot \frac{dv}{dt}$$

şi obţinem:

Propoziţia 11.4.1 *În condiţiile de mai sus, avem:*

$$l(\widetilde{\gamma}) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{E(u,v)\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F(u,v)\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + G(u,v)\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}dt$$

Să analizăm acum cazul în care γ este o curbă de coordonate pe σ.

Pentru $v = v_0 =$ constant obţinem curba

$$(\gamma_{v_0}) : \begin{cases} u(t) = t \\ v(t) = v_0 \end{cases}, \quad t \in U.$$

(Am considerat că D este de forma $D = U \times V$.) Conform Propoziţiei 11.4.1 avem

$$l(\gamma_{v_0}|_{M_1M_2}) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{E(u(t), v_0)}dt.$$

Pentru $u = u_0 =$ constant obţinem curba

$$(\gamma_{u_0}) : \begin{cases} u(t) = u_0 \\ v(t) = t \end{cases}, \quad t \in V$$

iar lungimea arcului se calculează astfel:

$$l(\gamma_{u_0}|_{M_1M_2}) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{G(u_0, v(t))}dt.$$

Definiţia 11.4.2 Fie două curbe γ_1, γ_2 situate pe suprafaţa σ ce au un punct comun M_0. *Unghiul* dintre curbele γ_1 şi γ_2 în M_0 este unghiul θ format de tangentele la cele două curbe în M_0. Spunem că γ_1 şi γ_2 sunt *ortogonale* în punctul M_0 dacă $\cos\theta = 0$.

Propoziţia 11.4.2 *Fie curbele* $(\gamma_1) : \overline{r}_1 = \overline{r}(u_1(t),\ v_1(t)),\ t \in I$ *şi* $(\gamma_2) : \overline{r}_2 = \overline{r}(u_2(s),\ v_2(s)),\ s \in J$ *astfel încât* $M_0(u_0, v_0) \in \gamma_1 \cap \gamma_2,\ u_0 = u_1(t_0) = u_2(s_0)$, $v_0 = v_1(t_0) = v_2(s_0)$, $t_0 \in I$ *şi* $s_0 \in J$.

Unghiul curbelor γ_1 *şi* γ_2 *în* M_0 *se determină astfel:*

$$\cos\theta = \frac{E_0\frac{du_1}{dt}\frac{du_2}{ds} + F_0\left(\frac{du_1}{dt}\frac{dv_2}{ds} + \frac{dv_1}{dt}\frac{du_2}{ds}\right) + G_0\frac{dv_1}{dt}\frac{dv_2}{ds}}{\sqrt{E_0(\frac{du_1}{dt})^2 + 2F_0\frac{du_1}{dt}\frac{dv_1}{dt} + G_0(\frac{dv_1}{dt})^2}\sqrt{E_0(\frac{du_2}{ds})^2 + 2F_0\frac{du_2}{ds}\frac{dv_2}{ds} + G_0(\frac{dv_2}{ds})^2}}$$

unde $E_0 = E(u_0, v_0),\ F_0 = F(u_0, v_0)$ *şi* $G_0 = G(u_0, v_0)$.

Demonstraţie: Vectorii de direcţie ai tangentelor în punctul M_0 la curbele γ_1 respectiv γ_2 sunt

$$\frac{d\overline{r}_1}{dt} = \overline{r}_u \cdot \frac{du_1}{dt} + \overline{r}_v \cdot \frac{dv_1}{dt}$$

$$\frac{d\overline{r}_2}{ds} = \overline{r}_u \cdot \frac{du_2}{ds} + \overline{r}_v \cdot \frac{dv_2}{ds}$$

iar unghiul format de aceste drepte se calculează cu formula

$$\cos\theta = \frac{\dfrac{d\overline{r}_1}{dt} \cdot \dfrac{d\overline{r}_2}{ds}}{\left\|\dfrac{d\overline{r}_1}{dt}\right\| \cdot \left\|\dfrac{d\overline{r}_2}{ds}\right\|}$$

Înlocuim şi obţinem formula din enunţ. $\diamondsuit$

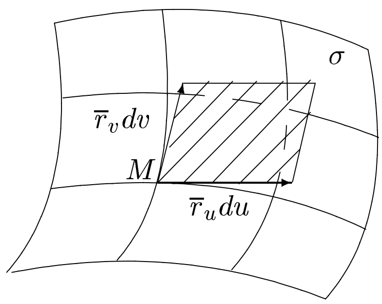
Observăm că în cazul curbelor de coordonate γ_{v_0} şi γ_{u_0} formula de mai sus devine

$$\cos\theta = \frac{F(u_0, v_0)}{\sqrt{E(u_0, v_0)G(u_0, v_0)}}$$

iar reţeaua curbelor de coordonate de pe suprafaţa σ este ortogonală dacă şi numai dacă $F(u, v) = 0, \ \forall \ (u, v) \in D$.

Definiţia 11.4.3 Fie suprafaţa σ având ecuaţia vectorială $\overline{r} = \overline{r}(u, v)$, $(u, v) \in D$ şi fie un punct $M(u, v) \in \sigma$. Se numeşte *element de arie* al suprafeţei σ în punctul M aria paralelogramului construit pe vectorii $\overline{r}_u du$ şi $\overline{r}_v dv$.

Notăm elementul de arie cu $d\sigma$.



Observaţia 11.4.2 (i) Folosind interpretarea geometrică a produsului vectorial obţinem:

$$d\sigma = \|\overline{r}_u du \times \overline{r}_v dv\| = \|\overline{r}_u \times \overline{r}_v\| dudv = \sqrt{\Delta} dudv = \sqrt{EG - F^2} dudv$$

(ii) Dacă suprafaţa σ are ecuaţia explicită $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D_2 \subset \mathbb{R}^2$, elementul de arie va avea expresia

$$d\sigma = \sqrt{1 + p^2 + q^2}dxdy.$$

(Am utilizat aici Observaţia 11.4.1.)

În cadrul cursului de Analiză matematică se demonstrează teorema următoare:

Teorema 11.4.2 *Aria unei porţiuni de suprafaţă* $\sigma' \subset \sigma$ *se calculează cu ajutorul integralei de suprafaţă* $\displaystyle\iint_{\sigma'} d\sigma$.

11.5 A doua formă fundamentală a unei suprafeţe

Considerăm suprafaţa $\sigma = s(D)$ din E_3, având reprezentarea vectorială $(\sigma) : \overline{r} = \overline{r}(u, v)$, $(u, v) \in D$, unde $\overline{r}$ este de clasă C^k, $k \geq 2$.

Fie $\overline{n}$ versorul normalei la suprafaţa σ într-un punct arbitrar. Conform Definiţiilor 11.3.1 şi 11.3.2 vom avea:

$$\overline{n} = \frac{\overline{r}_u \times \overline{r}_v}{\|\overline{r}_u \times \overline{r}_v\|} = \frac{\overline{r}_u \times \overline{r}_v}{\sqrt{\Delta}}$$

Definiţia 11.5.1 Se numeşte *a doua formă fundamentală* a suprafeţei σ forma diferenţială

$$\psi = -d\overline{r} \cdot d\overline{n}.$$

Teorema 11.5.1 *A doua formă fundamentală a suprafeţei* σ *este o formă pătratică în diferenţialele* du *şi* dv *ale coordonatelor curbilinii, care are expresia*

$$\psi = L(u, v)du^2 + 2M(u, v)dudv + N(u, v)dv^2,$$

unde funcţiile $L, M, N : D \to \mathbb{R}$, *de clasă* C^{k-2}, *numite coeficienţii celei de-a doua forme fundamentale, sunt definite astfel:*

$$L(u, v) = -\,\overline{r}_u \cdot \overline{n}_u = \overline{n} \cdot \overline{r}_{uu} = \frac{1}{\sqrt{\Delta}}(\overline{r}_u, \overline{r}_v, \overline{r}_{uu})$$

$$M(u, v) = -\,\overline{r}_u \cdot \overline{n}_v = -\overline{r}_v \cdot \overline{n}_u = \overline{n} \cdot \overline{r}_{uv} = \frac{1}{\sqrt{\Delta}}(\overline{r}_u, \overline{r}_v, \overline{r}_{uv})$$

$$N(u, v) = -\,\overline{r}_v \cdot \overline{n}_v = \overline{n} \cdot \overline{r}_{vv} = \frac{1}{\sqrt{\Delta}}(\overline{r}_u, \overline{r}_v, \overline{r}_{vv})$$

Demonstraţie: Utilizăm Definiţia 11.5.1, în care înlocuim

$$d\overline{r} = \overline{r}_u du + \overline{r}_v dv \quad \text{şi} \quad d\overline{n} = \overline{n}_u du + \overline{n}_v dv$$

şi obţinem

$$\psi = -\overline{r}_u \cdot \overline{n}_u du^2 - (\overline{r}_u \cdot \overline{n}_v + \overline{r}_v \cdot \overline{n}_u) du dv - \overline{r}_v \cdot \overline{n}_v dv^2$$

Evident $\overline{n} \perp \overline{r}_u$ şi $\overline{n} \perp \overline{r}_v$, ceea ce implică $\overline{n} \cdot \overline{r}_u = 0$ şi $\overline{n} \cdot \overline{r}_v = 0$. Derivăm prima egalitate în raport cu v şi cea de-a doua în raport cu u şi avem:

$$\overline{n}_v \cdot \overline{r}_u + \overline{n} \cdot \overline{r}_{uv} = 0$$

$$\overline{n}_u \cdot \overline{r}_v + \overline{n} \cdot \overline{r}_{vu} = 0$$

Deoarece $\overline{r}_{uv} = \overline{r}_{vu}$ rezultă că $\overline{n}_v \cdot \overline{r}_u = \overline{n}_u \cdot \overline{r}_v$.

Pe de altă parte, $\overline{n} \perp \overline{r}_u$ şi $\overline{n} \perp \overline{r}_v$ implică $\overline{n} \cdot d\overline{r} = 0$, în consecinţă $d(\overline{n} \cdot d\overline{r}) = 0$ sau, echivalent, $d\overline{n} \cdot d\overline{r} + \overline{n} \cdot d^2\overline{r} = 0$.

Din această egalitate şi Definiţia 11.5.1 obţinem

$$\psi = -d\overline{r} \cdot d\overline{n} = \overline{n} \cdot d^2\overline{r}$$

Calculăm acum $d^2\overline{r}$:

$$d^2\overline{r} = d(\overline{r}_u du + \overline{r}_v dv) = \overline{r}_{uu} du^2 + 2\overline{r}_{uv} du dv + \overline{r}_{vv} dv^2 + \overline{r}_u d^2u + \overline{r}_v d^2v$$

şi înlocuim în expresia formei pătratice ψ :

$$\psi = \overline{n} \cdot d^2\overline{r} = \overline{n} \cdot \overline{r}_{uu} du^2 + 2\overline{n} \cdot \overline{r}_{uv} du dv + \overline{n} \cdot \overline{r}_{vv} dv^2 + \overline{n} \cdot \overline{r}_u d^2u + \overline{n} \cdot \overline{r}_v d^2v.$$

Remarcăm faptul că ultimii doi termeni sunt nuli.

În acest fel, am obţinut următoarele egalităţi:

$$\begin{aligned}
L(u,v) &= -\,\overline{r}_u \cdot \overline{n}_u = \overline{n} \cdot \overline{r}_{uu} = \frac{\overline{r}_u \times \overline{r}_v}{\sqrt{\Delta}} \cdot \overline{r}_{uu} = \frac{1}{\sqrt{\Delta}}(\overline{r}_u, \overline{r}_v, \overline{r}_{uu}) \\
M(u,v) &= -\,\frac{1}{2}(\overline{r}_u \cdot \overline{n}_v + \overline{r}_v \cdot \overline{n}_u) = -\overline{r}_u \cdot \overline{n}_v = -\overline{r}_v \cdot \overline{n}_u = \overline{n} \cdot \overline{r}_{uv} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{\Delta}}(\overline{r}_u, \overline{r}_v, \overline{r}_{uv}) \\
N(u,v) &= -\,\overline{r}_v \cdot \overline{n}_v = \overline{n} \cdot \overline{r}_{vv} = \frac{1}{\sqrt{\Delta}}(\overline{r}_u, \overline{r}_v, \overline{r}_{vv})
\end{aligned}$$

ceea ce completează demonstraţia teoremei. $\diamondsuit$

Observaţia 11.5.1 Reţinem egalitatea $\psi = \overline{n} \cdot d^2\overline{r}$, obţinută în demonstraţia Teoremei 11.5.1.

Observaţia 11.5.2 Fie suprafaţa $(\sigma) : z = z(x, y)$, $(x, y) \in D_2 \subset \mathbb{R}^2$. Cu notaţiile

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

expresia celei de-a doua forme fundamentale va fi următoarea:

$$\psi = \frac{rdx^2 + 2sdxdy + tdy^2}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}$$

Remarcăm faptul că prima formă fundamentală ϕ este o formă pătratică pozitiv definită, în timp ce a doua formă fundamentală ψ este nedefinită. Discriminantul celei de-a doua forme fundamentale ψ îl vom nota în continuare cu $\delta = LN - M^2$.

11.6 Liniile asimptotice ale unei suprafeţe

Definiţia 11.6.1 Se numesc *linii asimptotice* ale suprafeţei σ acele curbe situate pe suprafaţă σ de-a lungul cărora cea de-a doua formă fundamentală se anulează.

Teorema 11.6.1 *Pe suprafaţa σ, având ecuaţia vectorială $\overline{r} = \overline{r}(u, v)$, $(u, v) \in D$, există două familii de linii asimptotice, de ecuaţie*

$$\frac{du}{dv} = \frac{-M \pm \sqrt{-\delta}}{L}.$$

Demonstraţie: Fie $\gamma \subset \sigma$ o linie asimptotică; de-a lungul curbei γ avem $\psi = 0$. Folosind Teorema 11.5.1 obţinem ecuaţia

$$Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2 = 0$$

sau, echivalent,

$$L\left(\frac{du}{dv}\right)^2 + 2M\frac{du}{dv} + N = 0$$

Rezolvăm această ecuaţie şi găsim

$$\frac{du}{dv} = \frac{-M \pm \sqrt{M^2 - LN}}{L}$$

Înlocuim acum $\delta = LN - M^2$. $\diamondsuit$

Printr-un punct $M_0(u_0, v_0) \in \sigma$ trec două linii asimptotice, câte una din fiecare familie. Natura liniilor asimptotice ale suprafeţei σ depinde de semnul discriminantului δ al celei de-a doua forme fundamentale.

Dacă liniile asimptotice sunt reale distincte ($\delta < 0$), M_0 se numeşte *punct hiperbolic*. Dacă liniile asimptotice prin M_0 sunt confundate ($\delta = 0$), M_0 se numeşte *punct parabolic*. Dacă liniile asimptotice sunt imaginare ($\delta > 0$), atunci M_0 se numeşte *punct eliptic*.

Orice punct $M_0(u_0, v_0) \in \sigma$ pentru care $L(u_0, v_0) = M(u_0, v_0) = N(u_0, v_0) = 0$ se numeşte *punct planar*. Punctele unui plan sunt puncte planare şi reciproc.

Un punct $M_0(u_0, v_0) \in \sigma$ pentru care $\dfrac{E(u_0, v_0)}{L(u_0, v_0)} = \dfrac{F(u_0, v_0)}{M(u_0, v_0)} = \dfrac{G(u_0, v_0)}{N(u_0, v_0)} \overset{not}{=} \dfrac{1}{a}$ se numeşte *punct sferic*.

Observăm că într-un astfel de punct avem $\delta = LN - M^2 = a^2(EG - F^2) = a^2\Delta > 0$, deci orice punct sferic este un punct eliptic. Orice punct al unei sfere este sferic şi reciproc.

Are loc următoarea teoremă de caracterizare a liniilor asimptotice:

Teorema 11.6.2 *Fie γ o curbă situată pe suprafaţa σ.*

γ este linie asimptotică a suprafeţei σ dacă şi numai dacă în orice punct $M \in \gamma$ planul osculator ω_M al curbei γ în M coincide cu planul tangent τ_M la suprafaţa σ în M.

Demonstraţie: Fie suprafaţa σ având ecuaţia vectorială $(\sigma) : \overline{r} = \overline{r}(u, v)$, $(u, v) \in D$ şi fie o curbă γ de ecuaţii $u = u(t),\ v = v(t),\ t \in I$.

" $\Rightarrow$ " Presupunem că $\gamma \subset \sigma$ este linie asimptotică, adică de-a lungul lui γ avem $\psi = 0$. Din Observaţia 11.5.1 obţinem $\overline{n} \cdot d^2\overline{r} = 0$, deci $\overline{n} \perp d^2\overline{r}$.

Pe de altă parte, $\overline{n} \perp \overline{r}_u$ şi $\overline{n} \perp \overline{r}_v$. Rezultă că $d^2\overline{r}$ este în acelaşi plan cu $\overline{r}_u$ şi $\overline{r}_v$ şi acelaşi lucru putem spune despre $\dfrac{d^2\overline{r}}{dt^2}$.

În acelaşi timp, avem $\dfrac{d\overline{r}}{dt} = \overline{r}_u \cdot \dfrac{du}{dt} + \overline{r}_v \cdot \dfrac{dv}{dt}$, în concluzie $\dfrac{d\overline{r}}{dt}$ este, de asemenea, în acelaşi plan cu vectorii $\overline{r}_u$ şi $\overline{r}_v$.

Însă $\overline{r}_u$ şi $\overline{r}_v$ sunt vectorii de direcţie ai planului τ_M, iar $\dfrac{d\overline{r}}{dt}$ şi $\dfrac{d^2\overline{r}}{dt^2}$ sunt vectorii de direcţie ai planului ω_M.

Deducem că are loc egalitatea $\omega_M = \tau_M,\ \forall\ M \in \gamma$.

" $\Leftarrow$ " Presupunem acum că $\omega_M = \tau_M,\ \forall\ M \in \gamma$.

Vectorii $\overline{r}_u, \overline{r}_v, \dfrac{d\overline{r}}{dt}$ şi $\dfrac{d^2\overline{r}}{dt^2}$ vor fi liniar dependenţi, deci $\left(\overline{r}_u, \overline{r}_v, \dfrac{d^2\overline{r}}{dt^2}\right) = 0.$ Din $\overline{n} = \overline{r}_u \times \overline{r}_v$ obţinem $\overline{n} \perp \dfrac{d^2\overline{r}}{dt^2}$, deci $\overline{n} \cdot d^2\overline{r} = 0$, sau echivalent,

$$Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2 = 0$$

În concluzie, γ este linie asimptotică a suprafeţei σ. $\diamondsuit$

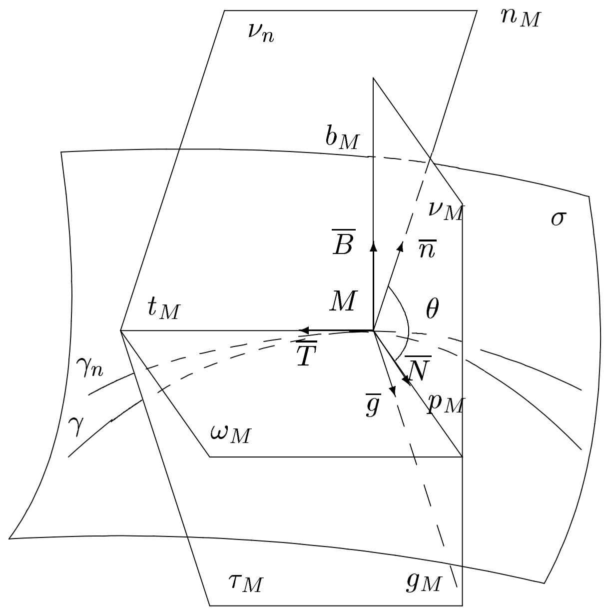
11.7 Curbura unei curbe pe o suprafaţă

Fie σ o suprafaţă din E_3, având ecuaţia vectorială $(\sigma) : \overline{r} = \overline{r}(u, v)$, $(u, v) \in D$, unde $\overline{r}$ de clasă C^k, $k \geq 2$. Fie $\gamma \subset \sigma$ o curbă dată prin ecuaţiile parametrice în coordonate curbilinii $(\gamma) : \ u = u(s), \ v = v(s)$, unde $s \in [0, l(\gamma)]$, $\|\dot{\vec{r}}(s)\| = 1$. Presupunem că în orice punct al curbei γ există planul osculator.

Fie $M \in \gamma$ un punct arbitrar. În acest punct considerăm:

- planul tangent τ_M şi normala n_M la σ
- tangenta t_M, normala principală p_M şi binormala b_M la γ
- planul osculator ω_M şi planul normal ν_M la γ.

Notăm cu θ unghiul dintre normala n_M la suprafaţa σ în punctul M şi normala principală p_M asociată curbei γ în M şi $g_M = \tau_M \cap \nu_M$.



Versorii reperului Frenet-Serret asociat curbei γ în punctul M sunt notaţi, ca de obicei, cu $\overline{T}, \overline{N}, \overline{B}$, versorul normalei n_M este $\overline{n}$ iar versorul dreptei g_M este $\overline{g}$.

Teorema 11.7.1 *Curbura* $k = \dfrac{1}{R}$ *a curbei* $\gamma \subset \sigma$ *într-un punct* $M \in \gamma$ *verifică relaţia:*

$$k \cdot \cos\theta = \frac{\cos\theta}{R} = \frac{Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2}{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}.$$

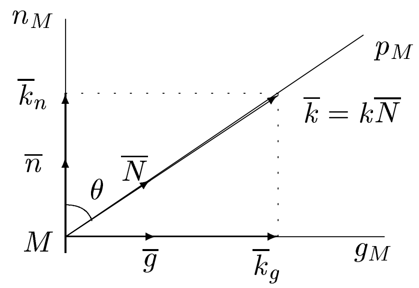
Demonstraţie: Fie $(\gamma) : \overline{r} = \overline{r}(u(s), v(s))$, $s \in [0, l(\gamma)]$, $\|\dot{\overrightarrow{r}}(s)\| = 1$. Din Teoremele 11.4.1 şi 11.5.1 şi Observaţia 11.5.1 avem:

$$\frac{\psi}{\phi} = \overline{n} \cdot \frac{d^2\overline{r}}{ds^2} = n \cdot \frac{d}{ds}\left(\frac{d\overline{r}}{ds}\right) = n \cdot \dot{\overline{T}}$$

Conform Teoremei 10.5.2 avem $\dot{\overline{T}} = k \cdot \overline{N}$, de unde rezultă
$\overline{n} \cdot \dot{\overline{T}} = k \cdot \overline{n} \cdot \overline{N} = k \cdot \|\overline{n}\| \cdot \|\overline{N}\| \cdot \cos\theta = k \cdot \cos\theta = \dfrac{\cos\theta}{R}$. $\diamondsuit$

Observăm că două curbe γ_1 şi γ_2 de pe suprafaţa σ, care trec prin punctul M şi au aceeaşi tangentă şi acelaşi plan osculator în M (unghiul θ este acelaşi, pentru γ_1 şi γ_2), au aceeaşi curbură în punctul M. În consecinţă, curbura curbei γ în punctul M este egală cu curbura curbei $\overline{\gamma} = \sigma \cap \omega_M$ în punctul M.

Să considerăm vectorul $\overline{k} = k \cdot \overline{N}$, numit vectorul de curbură al curbei γ în punctul M. Descompunem acest vector după direcţiile vectorilor $\overline{n}$ şi $\overline{g}$.



$\overline{k}_g$ şi $\overline{g}$ sunt coliniari, deci $\exists\ k_g \in \mathbb{R}$ astfel înât $\overline{k}_g = k_g \cdot \overline{g}$. De asemenea $\exists\ k_n \in \mathbb{R}$ astfel încât $\overline{k}_n = k_n \cdot \overline{n}$.

Observaţia 11.7.1 Are loc egalitatea $k_g^2 + k_n^2 = k^2$.

Definiţia 11.7.1 $\overline{k}_n$ se numeşte *vectorul curbură normală* asociat curbei γ în punctul M, k_n este *curbura normală* în M, iar $R_n = \dfrac{1}{k_n}$ este *raza de curbură normală* în M.

$\overline{k}_g$ se numeşte *vectorul curbură geodezică* asociat curbei γ în punctul M, k_g este *curbura geodezică*, iar $R_g = \dfrac{1}{k_g}$ este *raza de curbură geodezică* în M.

Propoziţia 11.7.1 *În condiţiile de mai sus, are loc formula (Meusnier)*

$$k_n = k \cdot \cos\theta$$

Demonstraţie: Prin definiţie, $\overline{k}_n = k_n \cdot \overline{n}$.

Pe de altă parte avem $\overline{k}_n = pr_{\overline{n}}\overline{k} = (\overline{k} \cdot \overline{n}) \cdot \overline{n} = (k \cdot \overline{N} \cdot \overline{n}) \cdot \overline{n} =$
$= k \cdot \|\overline{N}\| \cdot \|\overline{n}\| \cdot \cos\theta \cdot \overline{n} = k \cdot \cos\theta \cdot \overline{n}$.

Din cele două egalităţi deducem $k_n = k \cdot \cos\theta$. $\diamondsuit$

Observaţia 11.7.2 (i) Pe baza Teoremei 11.7.1 şi a Propoziţiei 11.7.1 obţinem

$$k_n = \frac{Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2}{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}$$

(ii) Toate curbele de pe suprafaţa σ care trec prin punctul M şi au aceeaşi tangentă în M vor avea aceeaşi curbură normală în punctul M.

(iii) Liniile asimptotice ale unei suprafeţe σ sunt curbele de pe σ de-a lungul cărora curbura normală se anulează.

Fie ν_n planul normal la suprafaţa σ în punctul M care conţine tangenta t_M asociată curbei γ în M. Fie $\gamma_n = \nu_n \cap \sigma$. Vom numi curba (plană) γ_n secţiunea normală a curbei γ în punctul M.

Din Propoziţia 11.7.1 şi Observaţia 11.7.2 (ii) obţinem:

Propoziţia 11.7.2 *Curbura normală k_n a curbei $\gamma \subset \sigma$ în punctul M şi curbura k_{sn} a secţiunii normale γ_n a lui γ în M verifică egalitatea*

$$|k_n| = |k_{sn}|.$$

11.8 Curbura totală şi curbura medie a unei suprafeţe

Fie M un punct de pe suprafaţa σ, fie ν un plan normal arbitrar la σ în punctul M şi $\gamma = \sigma \cap \nu$ o secţiune normală arbitrară în M.

Teorema 11.8.1 *Mulţimea* $\{k_n\}$ *a curburilor normale ale curbelor de pe suprafaţa* σ *care trec prin punctul* M *are două valori extreme,* k_n^{min} *şi* k_n^{max}*, care sunt rădăcinile ecuaţiei*

$$\Delta \cdot k_n^2 - (EN - 2FM + GL) \cdot k_n + \delta = 0.$$

Demonstraţie: Fie curba γ dată prin ecuaţia explicită în coordonate curbilinii $(\gamma) : v = \varphi(u)$, $u \in I$. Avem $dv = \varphi'(u)du$ şi notăm

$$\frac{dv}{du} = \varphi'(u) = \lambda.$$

Din Observaţia 11.7.2(i) obţinem

$$k_n = \frac{L + 2M\lambda + N\lambda^2}{E + 2F\lambda + G\lambda^2}.$$

Găsim punctele de extrem ale funcţiei $k_n = k_n(\lambda)$. Condiţia $k_n'(\lambda) = 0$ implică

$$(M + N\lambda)(E + 2F\lambda + G\lambda^2) - (F + G\lambda)(L + 2M\lambda + N\lambda^2) = 0$$

sau, echivalent,

$$\frac{M + N\lambda}{F + G\lambda} = \frac{L + 2M\lambda + N\lambda^2}{E + 2F\lambda + G\lambda^2}$$

de unde rezultă

$$k_n = \frac{M + N\lambda}{F + G\lambda} = \frac{L + 2M\lambda + N\lambda^2 - \lambda(M + N\lambda)}{E + 2F\lambda + G\lambda^2 - \lambda(F + G\lambda)} = \frac{L + M\lambda}{E + F\lambda}$$

De aici găsim

$$\lambda = \frac{F \cdot k_n - M}{N - G \cdot k_n} = \frac{E \cdot k_n - L}{M - F \cdot k_n}$$

ceea ce implică

$$(EG - F^2) \cdot k_n^2 - (EN - 2FM + GL) \cdot k_n + (LN - M^2) = 0$$

Înlocuim $\Delta = EG - F^2$ şi $\delta = LN - M^2$. $\diamondsuit$

Definiţia 11.8.1 k_n^{min} şi k_n^{max} se numesc *curburile principale* ale suprafeţei σ în punctul M.

Definiţia 11.8.2 Se numeşte *curbura totală (Gauss)* a suprafeţei σ în punctul $M \in \sigma$ numărul

$$K(M) = k_n^{min} \cdot k_n^{max}$$

iar numărul

$$H(M) = \frac{1}{2}(k_n^{min} + k_n^{max})$$

se numeşte *curbura medie* a suprafeţei σ în punctul M.

Observaţia 11.8.1 Din Teorema 11.8.1 obţinem

$$\begin{aligned} K(M) =& \frac{\delta}{\Delta} = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} \\ H(M) =& \frac{1}{2} \cdot \frac{EN - 2FM + GL}{EG - F^2} \end{aligned}$$

Observaţia 11.8.2 Fie $(\sigma) : z = z(x, y)$, $(x, y) \in D_2 \subset \mathbb{R}^2$. Folosind notaţiile din Observaţia 11.5.2, formulele de calcul pentru curbura totală respectiv curbura medie sunt următoarele:

$$\begin{aligned} K(M) =& \frac{rt - s^2}{(1 + p^2 + q^2)^2} \\ H(M) =& \frac{1}{2} \cdot \frac{(1 + p^2)t - 2pqs + (1 + q^2)r}{(1 + p^2 + q^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

11.9 Liniile de curbură ale unei suprafeţe

Planele normale la suprafaţa σ într-un punct M al suprafeţei σ corespunzătoare curburilor principale k_n^{min} şi k_n^{max} intersectează planul τ_M tangent la σ în M după două drepte, care se numesc direcţii principale în punctul M.

Definiţia 11.9.1 Se numesc *linii de curbură* ale suprafeţei σ curbele situate pe σ cu proprietatea că tangentele în orice punct sunt direcţiile principale.

Teorema 11.9.1 *Fie suprafaţa σ de ecuaţie vectorială $\overline{r} = \overline{r}(u, v)$, $(u, v) \in D \subset \mathbb{R}^2$. Pe suprafaţa σ există două familii de linii de curbură, a căror ecuaţie este*

$$\begin{vmatrix} dv^2 & -dudv & du^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0$$

Printr-un punct $M_0(u_0, v_0) \in \sigma$, care nu este planar şi nici sferic, trec două linii de curbură, câte una din fiecare familie; cele două linii de curbură sunt ortogonale.

Fără demonstraţie.

11.10 Liniile geodezice ale unei suprafeţe

Reamintim că vectorul curbură geodezică asociat unei curbe γ de pe suprafaţa σ, într-un punct dat, are expresia $\overline{k}_g = k_g \cdot \overline{g}$, k_g fiind curbura geodezică.

Teorema 11.10.1 *Curbura geodezică k_g a unei curbe $\gamma \subset \sigma$,*

$$(\gamma) : u = u(s),\ v = v(s),\ s \in [0, l(\gamma)],\ \|\dot{\overline{r}}(s)\| = 1$$

într-un punct $M \in \gamma$, verifică relaţia

$$k_g = (\dot{\overline{r}}, \ddot{\overline{r}}, \overline{n})$$

$\overline{n}$ fiind versorul normalei la suprafaţa σ în punctul M.

Demonstraţie: Din $\overline{k}_g = pr_{\overline{g}}\overline{k} = (\overline{k}\cdot\overline{g})\cdot\overline{g} = (k\cdot\overline{N}\cdot\overline{g})\cdot\overline{g}$ avem $k_g = k\cdot\overline{N}\cdot\overline{g}$. Conform Teoremei 10.5.2, $k \cdot \overline{N} = \dot{\overline{T}} = \ddot{\overline{r}}$. Obţinem $k_g = \ddot{\overline{r}} \cdot \overline{g} = \ddot{\overline{r}} \cdot (\overline{n} \times \overline{T}) = (\ddot{\overline{r}}, \overline{n}, \overline{T}) = (\ddot{\overline{r}}, \overline{n}, \dot{\overline{r}}) = (\dot{\overline{r}}, \ddot{\overline{r}}, \overline{n})$. $\diamondsuit$

Definiţia 11.10.1 Se numesc *linii geodezice* ale unei suprafeţe σ curbele de pe suprafaţa σ de-a lungul cărora curbura geodezică este nulă.

Teorema 11.10.2 *Fie suprafaţa σ de ecuaţie vectorială*

$$(\sigma) : \overline{r} = \overline{r}(u, v),\ (u, v) \in D \subset \mathbb{R}^2.$$

Ecuaţia liniilor geodezice ale suprafeţei σ este

$$(d\overline{r}, d^2\overline{r}, \overline{n}) = 0$$

sau, echivalent,

$$\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \\ A & B & C \end{vmatrix} = 0$$

unde A, B, C sunt minorii cu semn ai matricei $\begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix}$.

Fără demonstraţie.

Liniile geodezice ale unei suprafeţe au proprietatea remarcabilă că lungimea unui arc de linie geodezică $\gamma \subset \sigma$ între două puncte $M_1, M_2 \in \gamma$ este mai mică decât lungimea oricărui arc de curbă de pe σ ce trece prin M_1 şi M_2.

Geodezicele unui plan sunt segmente de dreaptă, iar pe o sferă geodezicele sunt arce situate pe cercurile mari ale sferei.

Bibliografie

[1] Călin AGUT, *Algebră liniară şi geometrie analitică. Culegere de probleme,* Editura Universităţii din Oradea, 1999

[2] Adrian C. ALBU, Petru DRAGOŞ, *Geometrie cu coordonate. Spaţii vectoriale. Spaţii euclidiene (cu 2 şi 3 dimensiuni),* Editura EUROBIT, Timişoara, 1997

[3] Adrian C. ALBU, Petru DRAGOŞ, *Lecţii de geometrie diferenţială locală (Curbe şi suprafeţe în spaţiul euclidian),* Editura Universităţii din Oradea, 1992

[4] Ion Doru ALBU, *Geometrie. Concepte şi metode de studiu. Partea a II-a. Metode algebrice în geometria euclidiană,* Editura Timpul, Reşiţa, 1999

[5] Ion Doru ALBU, *Geometrie. Concepte şi metode de studiu. Metoda coordonatelor în spaţiul euclidian,* Editura de Vest, Timişoara, 2002

[6] Mihai ANASTASIEI, *Geometrie: Curbe şi suprafeţe,* Editura Tehnică, Ştiinţifică şi Didactică CERMI, Iaşi, 2003

[7] Dorin ANDRICA, Dorel DUCA, Ioan PURDEA, Ioan POP, *Matematica de bază, Ediţia a IV-a revăzută şi completată,* Editura Studium, Cluj-Napoca, 2002

[8] Dorin ANDRICA, Csaba VARGA, Daniel VĂCĂREŢU, *Teme şi probleme alese de geometrie,* Editura PLUS, Bucureşti, 2002

[9] Gheorghe ATANASIU, Gheorghe MUNTEANU, Vasile POSTOLACHE, *Algebră liniară, geometrie analitică, diferenţială, ecuaţii diferenţiale. Culegere de probleme,* Editura ALL, Bucureşti, 1994

[10] Manfredo Perdigao do CARMO, *Differential geometry of curves and surfaces,* Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey, 1976

[11] Graţiela CICORTAŞ, Călin AGUT, *Geometrie diferenţială. Culegere de probleme. Geometria diferenţială a curbelor şi suprafeţelor,* Editura Universităţii din Oradea, 1999

[12] Mircea CRÂŞMĂREANU, *Geometrie: Curbe şi suprafeţe. Culegere de probleme,* Editura Tehnică, Ştiinţifică şi Didactică CERMI, Iaşi, 2003

[13] Pavel ENGHIŞ, Marian ŢARINĂ, *Curs de geometrie diferenţială,* Litografia Universităţii "BaBeş- Bolyai", Cluj- Napoca, 1985

[14] Alfred GRAY, *Modern differential geometry of curves and surfaces,* CRC Press, Boca Raton ann Arbor London Tokyo, 1993

[15] Cornel S. PINTEA, *Geometrie. Elemente de geometrie analitică. Elemente de geometrie diferenţială a curbelor şi suprafeţelor,* Presa Universitară Clujeană, 2001

[16] I.P. POPESCU, *Geometrie afină şi euclidiană,* Editura Facla, Timişoara, 1984

[17] Constantin I. RADU, *Algebră liniară. Geometrie analitică şi diferenţială,* Editura ALL, Bucureşti, 1994

[18] Elefterie ROGAI, *Algebră vectorială. Aplicaţii în geometrie,* Editura SIGMA, Bucureşti, 2002

[19] Octavian STĂNĂŞILĂ, *Analiză liniară şi geometrie. Curs de matematică pentru anii I şi II,* Editura ALL EDUCAŢIONAL, 2000

Cuprins